UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE
Scuola di Scienze della Salute Umana

PRECORSO 2013

Problemi di Matematica

Alessandro Passeri
Dipartimento di
Scienze Biomediche, Sperimentali e Cliniche

PRECORSO 2013: ciclo formativo di orientamento alle prove di ammissione ai Corsi di studio a numero programmato della Scuola si SSU - A.A. 2013/14

Numeri, frazioni, operazioni fondamentali

<u>Problema elementare</u>

La base di partenza per il calcolo dell'IMU di un immobile di classe A1 si ottiene rivalutando la rendita catastale del 5% e moltiplicando il risultato ottenuto per 160. Allo stesso risultato si può giungere in un solo passaggio, moltiplicando direttamente la rendita catastale per un opportuno coefficiente *c*. Determinare il valore di *c*. (Test 2012)

Analisi del testo

parte essenziale: "… <u>rivalutando</u> (ovvero aumentando, ovvero sommando) <u>la rendita catastale del 5%</u> e moltiplicando … per 160 …"

Se R è la rendita catastale e B è la base di partenza per calcolo IMU:

$$B = \left(R + R \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160$$

<u>di nuovo Analisi del testo</u>

" … Allo stesso risultato …" vuol dire B

…si può giungere … moltiplicando direttamente la rendita catastale (R) per un opportuno coefficiente *c …"*

Ovvero $B = c \cdot R$

Quindi …

$$\begin{cases} B = \left(R + R \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160 \\ B = c \cdot R \end{cases} \Rightarrow c \cdot \cancel{R} = \left(\cancel{R} + \cancel{R} \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160$$

da cui $c = \left(1 + \frac{5}{100} \right) \cdot 160 = 168$

Se sul prezzo di un oggetto si pratica lo sconto del 30%, e quindi sul prezzo così ottenuto si applica un nuovo sconto del 20%, quanto vale in percentuale lo sconto (cioè la riduzione percentuale) totale sul prezzo iniziale:

Attenzione: il 20% è applicato sul valore già scontato del 30% !!!

Parto da 100 → 70 → 56, quindi in tutto l'ho scontato del….

A) quesito senza soluzione univoca e corretta

B) 44% ←

C) 50%

D) 36%

E) 66%

Io pago X • 70/100 • 80/100 = 56/100 • X

=> Sconto totale = 44 / 100 • X

<u>Elevamento a potenza di un numero</u>

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

… ma allora … $a^n = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots}^{m \text{ volte}} \overbrace{\cdot\, a \cdot a \cdot a}^{k \text{ volte}}}_{n \text{ volte}}$ … ovviamente con $n=m+k$

quindi $a^n = a^m \cdot a^k$ e poiché abbiamo convenuto che $n=m+k$, allora

$$a^{m+k} = a^m \cdot a^k$$

Proprietà fondamentale delle potenze

Elevamento a potenza di un numero

Analogamente, è semplicissimo (… mi sembra …) osservare che

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot}^{m\text{ volte}}\ldots\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot a}^{k\text{ volte}}}{\underbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}}_{m\text{ volte}}} = a^k$$

ma k=n-m, per cui

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Proprietà fondamentale delle potenze

Elevamento a potenza di un numero

… domanda da test: "**La metà di 10^6 è:**"

$$10^6 = 10^{(1+5)} = 10 \cdot 10^5$$

quindi …

$$\frac{10^6}{2} = \frac{10 \cdot 10^5}{2} = 5 \cdot 10^5$$

Elevamento a potenza di un numero

Interpretare un numero come una potenza può rappresentare un modo molto rapido per comprenderne la natura:

Determinare quale dei seguenti numeri non è un quadrato perfetto: (test 2012)

A)800
B)256
C) 12•27
D) 10000
E) 11•44

$800=2^3 \cdot 10^2$ … NON è un quadrato perfetto

[illegible]

Sia $a = 1001^2 - 999^2$. Determinare quale delle seguenti relazioni è verificata.

A) $3000 < a < 5000$
B) $a < 1000$
C) $1000 < a < 3000$
D) $5000 < a < 7000$
E) $a > 7000$

$a = 1001^2 - 999^2$ … ovvero: $a = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

da cui si desume immediatamente che, essendo:
$x=1001$
$y= 999$
… allora

$(x+y)=2000$
$(x-y)=2$

… perciò: $a = 2000 \cdot 2 = 4000$

Una potenza perfetta è un numero intero che si può scrivere nella forma a^b, con *a* e *b* interi maggiori o uguali a 2. Determinare quale dei seguenti interi NON è una potenza perfetta.

A) 125
B) 2500
C) 216
D) 500
E) 1000

$125 = 5^3$ $2500 = 50^2$ $216 = 6^3$ $1000 = 10^3$

$500 = 5 \cdot 10^2$
5 è numero primo e solo 100 è un quadrato perfetto…

Qual è il più grande fra i seguenti numeri:

1) 2^{62}

2) 232

3) $2^{(2^6)}$

4) $\left(2^2\right)^6$

5) 1024

Escludo subito il numero 232, essendo più piccolo di 1024.
Osservo, inoltre, che i numeri rimanenti sono tutti potenze di 2:

$2^{(2^6)} = 2^{64}$

$\left(2^2\right)^6 = 2^{12}$ …e l'esponente più alto … vince …

$1024 = 2^{10}$

Data l'equazione 5 logx = log32, posso affermare che x è uguale a:

Si dice *logaritmo* in base *a* di un numero *x* l'esponente da dare ad *a* per ottenere *x* (*x* viene chiamato *argomento* del logaritmo).

In altre parole, se $x = a^y$

segue che: $y = \log_a x$

Per esempio, $\log_3 81 = 4$ perché $3^4 = 81$.

E' tutt'altro che difficile dimostrare la relazione:

$$\log_a\left(x^k\right) = k\log_a x$$

dove *a* ed *x* sono numeri reali positivi, con a diverso da 1.

Data l'equazione 5 logx = log32, posso affermare che x è uguale a:

1) 1/2
2) 2
3) 5
4) 4/2^(-1/2)
5) Nessuna delle altre quattro risposte

Proprietà dei logaritmi

$k \log x = \log (x^k)$ $\log x^5 = \log 32$ $\Longrightarrow$ $x^5 = 32$

quindi x=2

Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,…

una **progressione aritmetica** è una **successione** di **numeri** tali che la **differenza** tra ciascun termine e il suo precedente sia una **costante**. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 3, 5, 7, 9, 11, ... è una progressione aritmetica di ragione 2.

una **progressione geometrica** è una **successione** di **numeri** tali che il **rapporto** tra ciascun termine e il suo precedente sia una **costante**. Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... è una progressione geometrica di ragione 2.

125, 64, 27, 8:

capisco subito che non si tratta di una progressione aritmetica …

125 – 64 = 61 (ipotesi di ragione)
… subito confutata: 64 – 27 = 37 !!!

…né di una progressione geometrica…

125 / 64 = 1.953 (ipotesi di ragione)
… subito confutata: 64 / 27 = 2.370 !!!

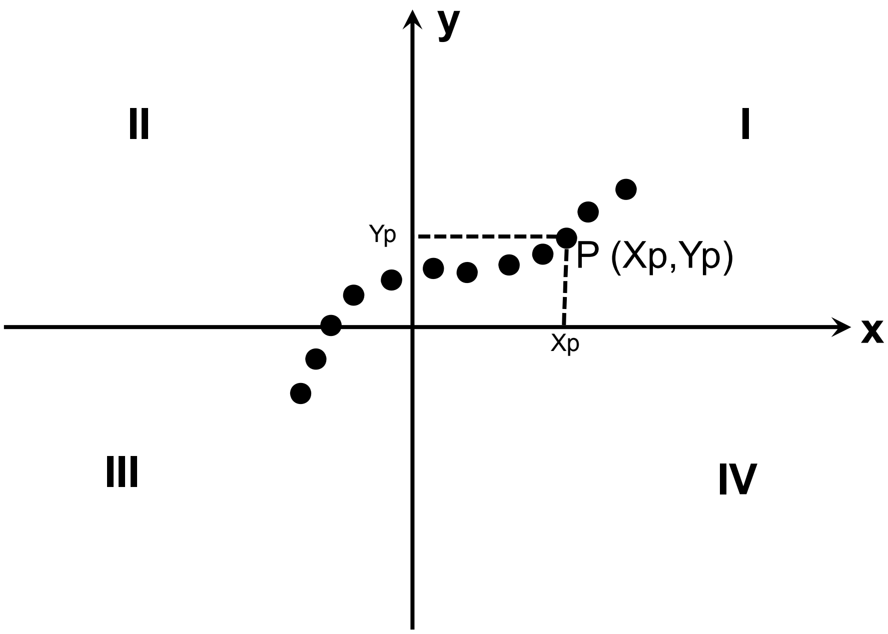
ne deduco che deve essere qualcosa di semplicissimo: una potenza (?)

vedo che $8 = 2^3$ … $27 = 3^3$ … non è che per caso $64 = 4^3$ e $125 = 5^3$???

Mi trovo allora con $\boldsymbol{5^3}$, $\boldsymbol{4^3}$, $\boldsymbol{3^3}$, $\boldsymbol{2^3}$ … cosa manca? $\boldsymbol{1^3}$, ovvero ***1***

125, 64, 27, 8, 1

Funzioni
Piano cartesiano
Geometria



Sia f(x) = 5^x. Allora f(x+1) – f(x) è uguale a:

A) 5^x

B) $4 \cdot 5^x$

C) $5 \cdot 5^x$

D) 5

E) 1

Tutto sta nello stabilire cosa sia *f(x+1)*: se *f(x)=5^x*, allora *f(x+1)=$5^{(x+1)}$*

$$5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$$

quindi

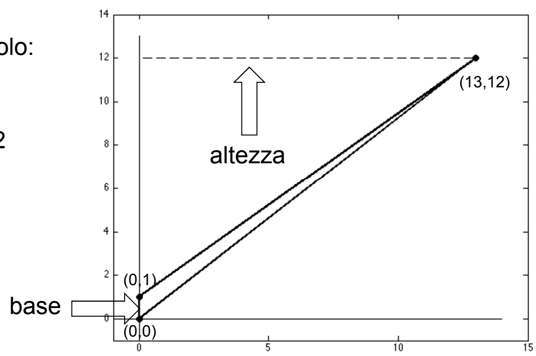
$$5 \cdot 5^x - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \cdot 5^x$$

Determinare l'area del triangolo che ha come vertici i punti (0,0),(0,1),(13,12) del piano cartesiano

a) 13/2
b) 6
c) 78
d) 12
e) 13

E' sufficiente disegnare il triangolo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{base} = 1\\ \text{altezza} = 13\end{array}\right\} \text{Area} = 13/2$$



Quale delle seguenti funzioni è rappresentata da una retta in coordinate cartesiane:

a) $y=\log_{10}10^{2x}$

b) y=(x-1)(x+1)

c) y=1/(x+1)

d) y=x/(x-1)

e) $y=(1-x^2)$

Una retta è una funzione rappresentata da un'equazione del tipo

$$y = m \cdot x + q$$

dove la variabile *x* compare al 1° grado e solo al numeratore

Per esclusione, la risposta è subito la **a)** …

… ma non solo per esclusione …

$$y = \log_{10} 10^{2x}$$

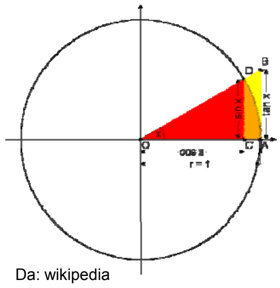
Dalle proprietà dei logaritmi

$$y = \log_{10} 10^{2x} = 2x \cdot \log_{10} 10 = 2x$$

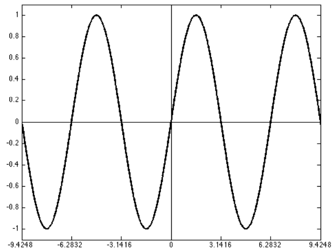
$$y = 2x$$

… equazione che rappresenta una retta passante per l'origine degli assi, con pendenza pari a *2*

Definizione del seno e del coseno di un angolo

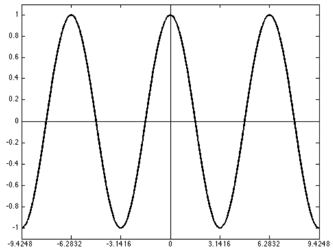


Da: wikipedia



sin(x)

dispari: sin(-x)=-sin(x)



cos(x)

pari: cos(-x)=cos(x)

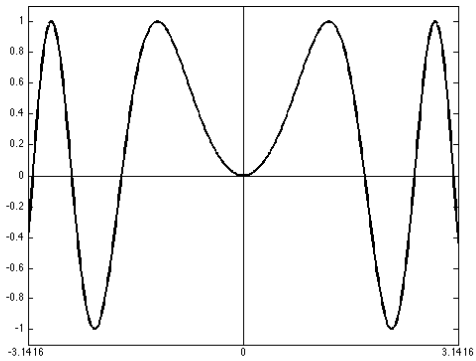
Determinare quale delle seguenti funzioni soddisfa la relazione *f(-x) = -f(x)* per ogni numero reale *x*

a) $\sin^3(x)$
b) $\cos^3(x)$
c) $\cos(x^3)$
d) $\sin^2(x)$
e) $\sin(x^2)$

Vediamole …

$y=sin(x^2)$

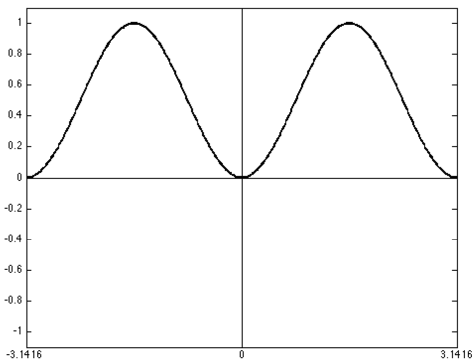
Se l'argomento è un quadrato, il valore di *y* non risentirà di *x* negativi:



… non è lei …

$y=sin^2(x)$

Se elevo al quadrato la funzione il suo valore sarà sempre positivo, annullando l'eventuale disparità per valori negativi della *x*:



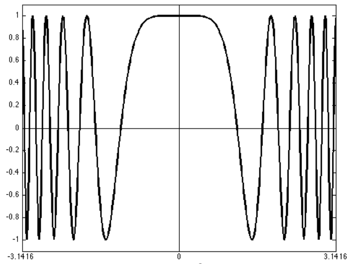
… non è lei …

$y=cos(x^3)$ *$y=cos^3(x)$*

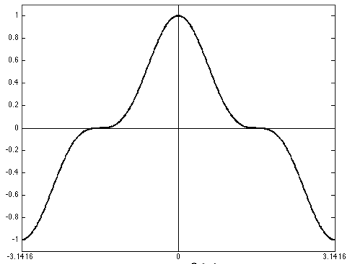
Una funzione pari, come il coseno, rimane pari in qualsiasi caso:

a) x^3 è solo un numero: che sia positivo o negativo, il coseno di un qualsiasi numero è comunque pari.

b) $cos^3 = cos^2 \cdot cos$: si tratta di una funzione senz'altro pari *(cos^2)* moltiplicata per una funzione ancora pari *(cos).* Quindi cos^3 è pari.



$y=cos(x^3)$

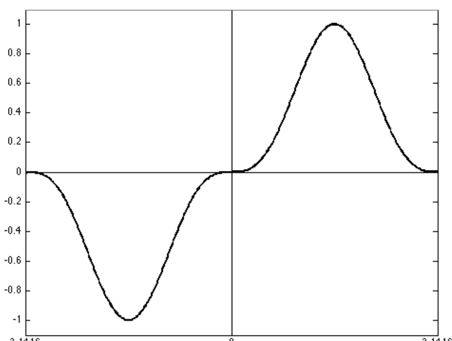


$y=cos^3(x)$

… non sono nemmeno loro …

$y=sin^3(x)$

$sin^3 = sin^2 \cdot sin$: si tratta di una funzione senz'altro pari *(sin^2)* moltiplicata per una funzione dispari *(sin).* Quindi sin^3 è dispari.



$sin^3(-x) = -sin^3(x)$

Probabilità

Definizione classica di Probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un evento è *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili*. (…)

Indicando con

1) Ω l'insieme di casi possibili
2) |Ω|=n la sua cardinalità, (ovvero il numero di casi possibili)
3) A un evento
4) n_A il numero dei casi favorevoli ad A

(ad esempio, nel lancio di un dado Ω={1,2,3,4,5,6}, n = 6, A = "numero pari", n_A = 3), la probabilità di A, indicata con $P(A)$, è pari a:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dalla definizione segue che:

- la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso tra 0 e 1

- la probabilità dell'evento certo è pari a 1:
  se *A* = "numero compreso tra 1 e 6", n_A = 6 e n_A/n = 1

- la probabilità del verificarsi di uno di due eventi incompatibili, ovvero di due eventi che non possono verificarsi simultaneamente, è pari alla somma delle probabilità dei due eventi;

- la probabilità del verificarsi contemporaneamente di due eventi indipendenti, è pari al prodotto delle singole probabilità

Esempio:
se *A* = "numero pari", con *P*(*A*) =1/2, e *B*= "esce il 3", con *P*(*B*) = 1/6, la probabilità che tirando un dado si ottenga un numero pari oppure un 3 è:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Esempio:
se *A* = "numero pari", con *P*(*A*) = 1/2, la probabilità che tirando due dadi (dado 1 e dado 2) si ottengano due numeri pari è:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n_{A_1}}{n} \cdot \frac{n_{A_2}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Nel gioco dei dadi, lanciando contemporaneamente due dadi, qual è la probabilità che si abbiano due facce con somma 7 ?

1) 1/3

2) 1/7

3) 1/6

4) 2/7

5) 5/36

Evidentemente, in questo caso, A="due faccie con somma 7" è soddisfatto dai seguenti eventi:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ovvero, $n_A=6$. Naturalmente, i possibili eventi totali sono 36 (per ogni numero su un dado, può uscire uno qualsiasi dei 6 numeri sull'altro dado).
Quindi

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Nel gioco della roulette, come si sa, i numeri vanno da 0 a 36. Qual è la probabilità che il 17 esca due volte di fila:

A) 1/(37x37)

B) 1/(37x36)

C) 1/(36x36)

D) 1/37 + 1/37

E) quesito senza soluzione univoca e corretta

La risposta D) sarebbe stata giusta se la domanda fosse stata:

"Qual è la probabilità che possa uscire (in una sola giocata) il 17 oppure il 18 ?"

Qual è la probabilità che un numero a due cifre abbia per somma delle cifre il valore 12 ?

1) 7/99
2) 2/90
3) 2/10
4) 7/90
5) 12/100

Quanti sono gli eventi favorevoli e quanti gli eventi possibili ?

I numeri a due cifre vanno da 10 a 99 quindi sono 90

Casi favorevoli: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93

***Determinare quante sono le parole di 7 lettere** (anche senza senso) **che si possono scrivere utilizzando solo le 4 lettere A, C, G, T** (si intende che non bisogna necessariamente utilizzare tutte le 4 lettere, per cui per esempio anche la parola AGGTATA va bene).

A) $7 \cdot 4$
B) $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4)/(4 \cdot 3 \cdot 2)$
C) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$
D) 7^4
E) 4^7

(___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___)

4 possibilità per la prima lettera

…per ciascuna delle quali ho 4 possibilità per la seconda lettera

… e cosi' via per le altre

In tutto ho quindi 4 x 4 x … x 4 = 4^7 parole

***Determinare quante sono le parole di 7 lettere** (anche senza senso) **che si possono scrivere utilizzando solo le 4 lettere A, C, G, T** (si intende che non bisogna necessariamente utilizzare tutte le 4 lettere, per cui per esempio anche la parola AGGTATA va bene).

A)7 · 4

B) (7·6·5·4)/(4·3·2)

C) 7 · 6 · 5 · 4

D) 7^4

E) 4^7

Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?

A) 15/64

B) 1/64

C) 15/16

D) 1/16

E) 5/32

Numero di casi possibili: 2 casi per lancio di moneta = 64 casi totali = 2^6

Numero di casi favorevoli = numero di modi diversi in cui posso ottenere le 4 teste in 6 lanci

Esempi di casi favorevoli: TTTTcc, TTTcTc, TTTccT, …

Il numero di casi favorevoli coincide con “numero di modi diversi con cui ottenere 2 croci in 6 lanci di moneta”

Conto questi casi: se al primo lancio ho croce, la seconda croce puo’ capitare in uno dei 5 lanci successivi: 5 casi

Se invece ho la prima croce al primo lancio, la seconda puo’ capitare in uno dei 4 lanci seguenti: altri 4 casi; e cosi’ via

In totale ho: 5+4+3+2+1 = 15 casi favorevoli

Combinazioni

Nel calcolo combinatorio, se n e k sono due interi positivi, si definisce **combinazione** di n elementi presi k alla volta (oppure di n elementi di classe k) ogni sottoinsieme di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti. Se si impone la condizione che una combinazione non può avere un elemento ripetuto si parla di combinazioni semplici, (…) con $k \leq n$.

(…) i sottoinsiemi si considerano indipendenti dall'ordine degli elementi. Ad esempio, se siamo in presenza dell'insieme $\{p,q,r,s,t\}$ e prendiamo in esame le combinazioni di classe 3, non fa alcuna differenza considerare i gruppi *prs*, *psr*, *rps*, *spr*, *rsp* ed *srp* in quanto essi sono formati dagli stessi elementi, mentre *prs* ed *srq* sono considerate due combinazioni distinte in quanto differiscono in alcuni degli elementi.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?

A) 15/64

B) 1/64

C) 15/16

D) 1/16

E) 5/32