

Facoltà di Medicina e Chirurgia
Università degli Studi di Firenze
Precorsi 2011

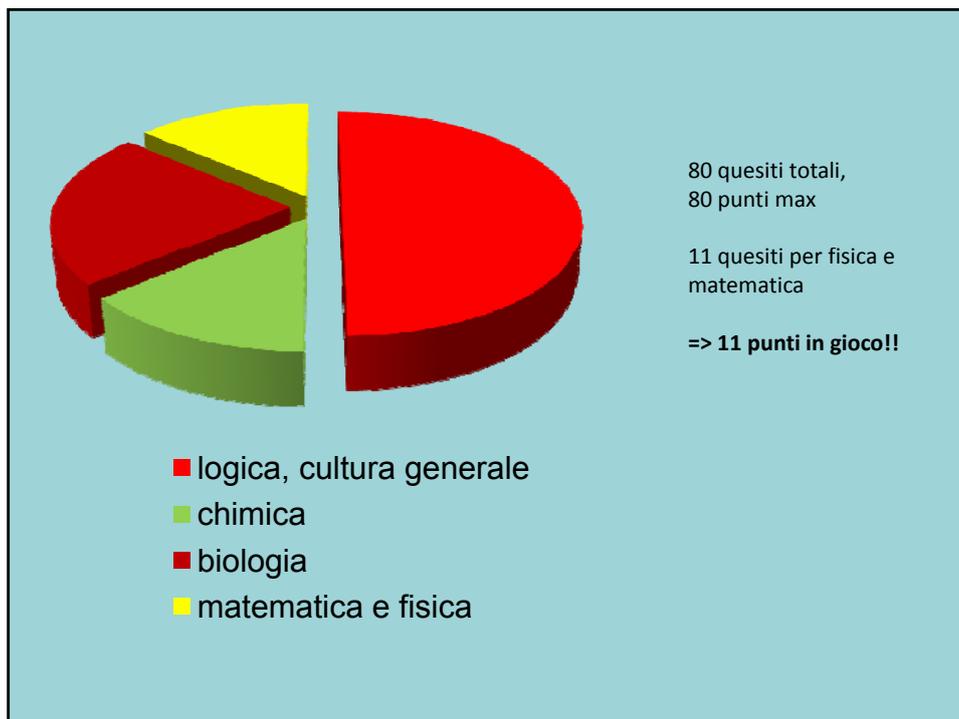
Problemi di Matematica

Giovanni Romano
Sezione di Fisica Medica
Dipartimento di Fisiopatologia Clinica

Decreto Ministeriale 15 giugno 2011

3. La prova di ammissione consiste nella soluzione di ottanta quesiti che presentano cinque opzioni di risposta, di cui il candidato ne deve individuare una soltanto, scartando le conclusioni errate, arbitrarie o meno probabili, su argomenti di: cultura generale e ragionamento logico; biologia; chimica; fisica e matematica. Sulla base dei programmi di cui all'allegato A, che costituisce parte integrante del presente decreto, vengono predisposti: quaranta (40) quesiti per l'argomento di cultura generale e ragionamento logico; diciotto (18) di biologia, undici (11) di chimica e undici (11) di fisica e matematica.

4. La prova di ammissione ha inizio alle ore 11.00 e per il suo svolgimento è assegnato un tempo di due ore.



argomenti

- Numeri, frazioni, operazioni fondamentali
- Potenze e logaritmi
- Equazioni e sistemi di equazioni
- Progressioni e successioni
- Geometria piana e solida
- Funzioni - Piano cartesiano
- Statistica - Probabilità

Le note teoriche, comprese le relative immagini, sono tratte da wikipedia (versione italiana) ove non altrimenti specificato

Numeri, frazioni, operazioni fondamentali

La metà di 10^6 è:

In matematica la potenza è un'operazione che associa ad una coppia di numeri a e n - detti rispettivamente base ed esponente - il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a :

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

In questo contesto a può essere un numero intero, razionale o reale mentre n è un numero intero positivo.

Le potenze scritte nella forma a^n si leggono come *elevato alla n* o più semplicemente *alla n* .

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

La metà di 10^6 è:

- a) 10^3
- b) 56
- c) $0,2 \cdot 10^6$
- d) $5 \cdot 10^5$
- e) $5 \cdot 10^6$

Un lavoratore riceve netti 1000 euro al mese; il datore di lavoro paga 1/3 del valore lordo in tasse. Qual è la spesa aggiuntiva sostenuta dal datore di lavoro, se lo stipendio netto passa da 1000 a 1500 euro al mese ?

$$\text{Netto} = 2/3 \text{ lordo} \rightarrow \text{lordo} = 3/2 \text{ netto} = 1.5 \text{ netto}$$

Il datore di lavoro spende il lordo

$$1000 \text{ netti} \rightarrow \text{datore spende } 1500$$

$$1500 \text{ netti} \rightarrow \text{datore spende } 2250$$

- 1) 250 euro
- 2) 750 euro 
- 3) 500 euro
- 4) 2250 euro
- 5) Con i dati forniti non si puo' rispondere

La somma di due numeri interi consecutivi è 169. La loro differenza in valore assoluto è:

- a) 2
- b) 12,5
- c) 1 
- d) >13
- e) 9

Interi **consecutivi**

La loro **differenza**

~~$$N + (N+1) = 169$$~~

~~$$N = (169 - 1) / 2 = 168 / 2 = 84$$~~

~~$$N+1 = 85$$~~

~~$$85 - 84 = 1$$~~

Un numero è divisibile per 4 quando:

In aritmetica, i criteri di divisibilità sono degli algoritmi che permettono di verificare la divisibilità di un numero per un fattore senza eseguire la divisione esplicita.

Consistono in una serie di operazioni sulle cifre che compongono il numero.

(...) vale la regola generale per cui un numero è divisibile per X se lo è contemporaneamente per tutti i fattori di X .

Così si può affermare ad esempio che un numero è divisibile per 6 se lo è sia per 2 che per 3.

Divisibilità per 4

Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono 00 oppure formano un numero multiplo di 4,

o equivalentemente le ultime due cifre sono tali che la sua penultima è dispari e l'ultima è 2 oppure 6, oppure la sua penultima cifra è pari e l'ultima è 0, 4, 8.

Un numero è divisibile per 4 quando:

A meno di non ricordarsi il criterio, si va per esclusione

- 1) La somma delle sue cifre è divisibile per 4
- 2) Il numero formato dalle sue due prime cifre è divisibile per 4
- 3) La sua ultima cifra è pari
- 4) Il numero formato dalle sue due ultime cifre è divisibile per 4 
- 5) La sua ultima cifra è 4 oppure 8

Un soggetto abituato a bere un quarto di vino al giorno deve osservare una dieta che prevede al massimo un quinto di litro di vino al giorno. A quale quantità giornaliera minima di vino dovrà rinunciare?

- A) 25 ml
- B) 100 ml
- C) 10 ml
- D) 75 ml
- E) 50 ml 

Un litro sono 1000 ml

$$1/4 - 1/5 = 1/20 \quad \dots\text{DI LITRO !!!}$$

$$1000 \text{ ml} / 20 = 50 \text{ ml}$$

Digitando l'importo, arrotondato all'euro, di uno degli assegni incassati in un certo giorno, un cassiere ha involontariamente invertito tra loro due cifre, causando a fine giornata una differenza positiva tra la somma di tutti i numeri digitati e la somma degli importi dei corrispondenti assegni arrotondati all'euro.

Tale differenza è sempre divisibile per:

- A) 10
- B) 4
- C) 5
- D) 2
- E) 9

Un generico numero intero con un qualsiasi numero di cifre (maggiore o uguale a due) è rappresentabile sempre come:

$$N = M + 10d + u \quad \text{Dove "d" indica la cifra delle decine ed "u" quella delle unità}$$

$$\text{Esempio: } 1256 = 1200 + 10 \cdot 5 + 6 \quad N = 1256; M=1200; d=5; u=6$$

Se inverte le ultime due cifre ottengo $M + 10u + d$

$$C = \text{Valore corretto} = M + 10d + u$$

$$E - C > 0$$

$$E = \text{Valore errato} = M + 10u + d$$

$$E - C = 10u + d - (10d + u) = 10(u-d) - (u-d) = 9(u-d)$$

Ho finito!!! (??!!)

Digitando l'importo, arrotondato all'euro, di uno degli assegni incassati in un certo giorno, un cassiere ha involontariamente invertito tra loro due cifre, causando a fine giornata una differenza positiva tra la somma di tutti i numeri digitati e la somma degli importi dei corrispondenti assegni arrotondati all'euro.

Tale differenza è sempre divisibile per:

A) 10

B) 4

C) 5

D) 2

E) 9



Non mi interessa sapere se la differenza a fine giornata sia positiva o meno

(al cassiere si'....)

Qual è il più grande fra i seguenti numeri:
 2^{62} ; 232; $2^{(2^6)}$; $(2^2)^6$; 1024

1) 2^{62}

2) 232

3) $2^{(2^6)}$ ←

4) $(2^2)^6$

5) 1024

Proprietà delle potenze
 $(X^a)^b = X^{ab}$

Confronterò quindi:

1) 62

2) escluso subito ($232 < 1024$)

3) $2^6 = 64$

4) $2^6 = 12$

5) 10 ($1024 = 2^{10}$)

Se sul prezzo di un oggetto si pratica lo sconto del 30%, e quindi sul prezzo così ottenuto si applica un nuovo sconto del 20%, quanto vale in percentuale lo sconto (cioè la riduzione percentuale) totale sul prezzo iniziale:

Attenzione: il 20% è applicato sul valore già scontato del 30% !!!

Parto da 100 → 70 → 56, quindi in tutto l'ho scontato del....

A) quesito senza soluzione univoca e corretta

B) 44% ←

C) 50%

D) 36%

E) 66%

$$\text{lo pago } X \cdot 70/100 \cdot 80/100 = 56/100 \cdot X$$

$$\Rightarrow \text{Sconto totale} = 44 / 100 \cdot X$$

Data l'equazione $5 \log x = \log 32$, posso affermare che x è uguale a:

Si dice *logaritmo* in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x (x viene chiamato *argomento* del logaritmo).

In altre parole, se $x = a^y$

segue che: $y = \log_a x$

(si legge: y è il logaritmo in base a di x).

Per esempio, $\log_3 81 = 4$ perché $3^4 = 81$. Vale in particolare la relazione:

$$\log_a (x^k) = k \log_a (x).$$

dove a , x e y sono numeri reali positivi, con a diverso da 1.

Data l'equazione $5 \log x = \log 32$, posso affermare che x è uguale a:

- 1) $\frac{1}{2}$
- 2) 2
- 3) 5 
- 4) $4/(2)^{-1/2}$
- 5) Nessuna delle altre quattro risposte

Proprietà dei logaritmi
 $k \log x = \log (x^k)$

$$\log x^5 = \log 32$$

$$x^5 = 32$$

In una progressione geometrica il primo elemento è 2 e il sesto è 0.0625.

Il quinto valore della progressione è:

- 1) 0.125 
- 2) 0.0125
- 3) 0.5
- 4) 0.05
- 5) Nessuno dei valori proposti nelle altre risposte è corretto

Progressione GEOMETRICA: $x \rightarrow x^n \rightarrow x^{n^2} \rightarrow \dots$

Esempi: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$ oppure $1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{8} \rightarrow \dots$

In questo caso $n < 1$ perché i numeri vanno a decrescere

Per trovare n: $(0.0625 / 2) = 1 / 32 \rightarrow n = (1 / 32)^{(1/5)} = \frac{1}{2}$

o se preferite: $2 / 0.0625 = 32 \rightarrow$ dal primo valore al sesto divido per 32 $\rightarrow n = 1/2$
quindi la risposta è.....

Se x e y sono due numeri diversi da 0 (x positivo), quale delle seguenti affermazioni è vera:

- A) y^x è sempre maggiore di 0
- B) $\log(x \cdot y)$ è sempre maggiore di 0
- C) $x \cdot y$ è sempre maggiore di 0
- D) x^y è sempre maggiore di 0 
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

Ricordarsi le proprietà dei logaritmi e delle potenze e poi andare per esclusione

Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,...

In matematica una **progressione aritmetica** è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante.

Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 3, 5, 7, 9, 11, ... è una progressione aritmetica di ragione 2.

Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,...

a) 1 

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

$1 = 1$ al cubo

La successione proposta NON è né aritmetica né geometrica!

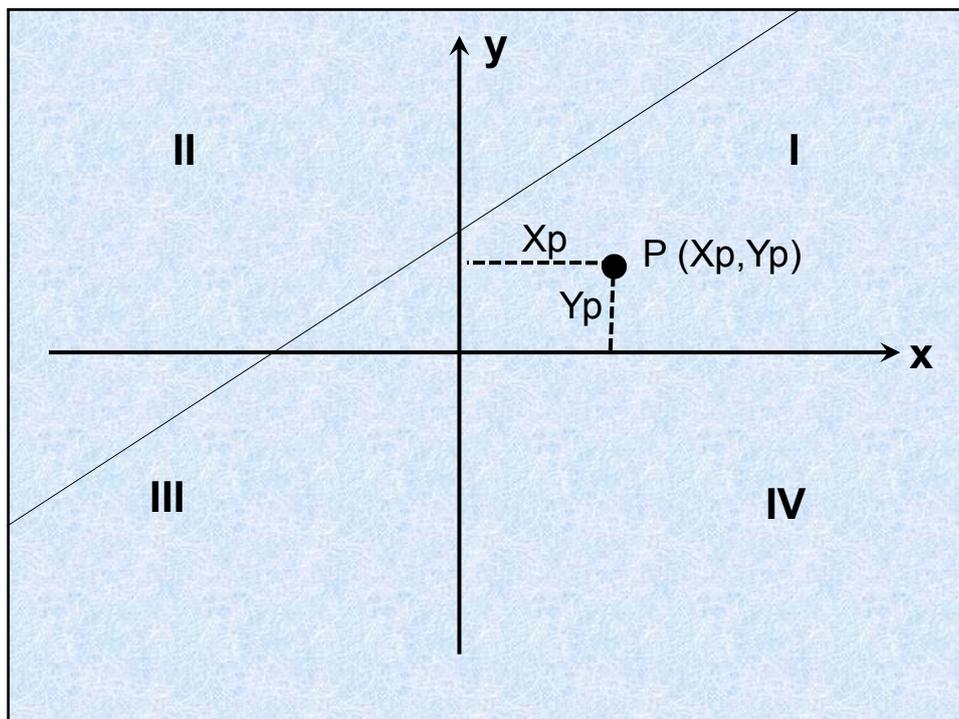
I valori della successione sono accomunati da una proprietà: sono tutti interi e NON sono dei quadrati perfetti, bensì'....

Con a e b diversi da 0, $(a+b) / (axb)$ è uguale a:

- A) $(1/a) \times (1/b)$
- B) $(1/a) + (1/b)$ 
- C) $(1/a)/(1/b)$
- D) $(a+b)/(a-b)$
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

Funzioni
Piano cartesiano
Geometria



Sia $f(x) = 5^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ è uguale a:

- A) 5^x
- B) $4 \cdot 5^x$ ←
- C) $5 \cdot 5^x$
- D) 5
- E) 1

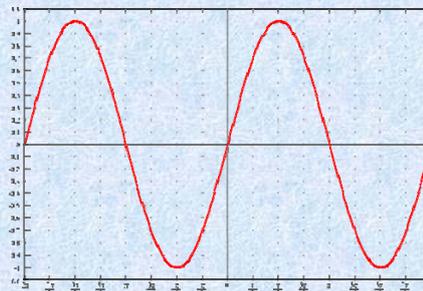
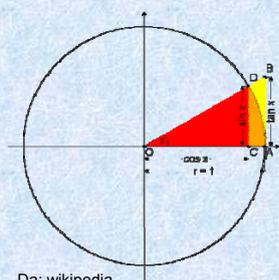
Proprietà delle potenze: $5^{(x+1)} = 5^x \cdot 5$

$$5^x \cdot 5 - 5^x = 5^x \cdot 4$$

La funzione $\sin \alpha$:

- a) si misura in gradi centigradi
- b) si misura in radianti
- c) si misura in gradi sessagesimali
- d) si misura in centimetri o metri
- e) è un numero puro

Ricordarsi la definizione del seno di un angolo



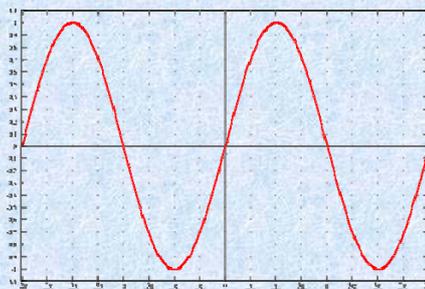
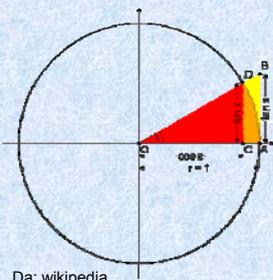
La funzione $\sin \alpha$:

- a) si misura in gradi centigradi
- b) si misura in radianti
- c) si misura in gradi sessagesimali
- d) si misura in centimetri o metri
- e) è un numero puro ←

L'espressione $2\sin(1)\cos(1)$:

- 1) vale 2
- 2) vale 0
- 3) vale $2\sqrt{2}$
- 4) è compresa fra 0 e 2 ←
- 5) è compresa fra -1 e 0

Ricordarsi le proprietà del seno e del coseno.



Quale delle seguenti funzioni è rappresentata da una retta in coordinate cartesiane:

a) $y = \log_{10} 10^{2x}$ ←

b) $y = (x-1)(x+1)$

c) $y = 1/(x+1)$

d) $y = x/(x-1)$

e) $y = (1-x^2)$

Escludere le funzioni NON lineari

...oppure ricordarsi che $\log_a a^x = x$

Quale delle seguenti condizioni deve verificarsi affinché la retta di equazione $y = mx + n$ non passi per il quarto quadrante?

1) $m < 0, n > 0$

2) $m > 0, n < 0$

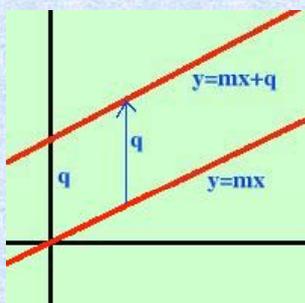
3) $m < 0, n < 0$

4) $m > 0, n = 0$

5) $m > 0, n > 0$

Attenzione a ricordare qual è il IV quadrante.

Qual è il significato di m e di n ?



<http://www.ripmat.it/>

Se $m > 0$ si hanno le rette in figura

Di sicuro, per NON passare dal 4 quadrante, deve essere q (oppure: n) > 0

Quale delle seguenti condizioni deve verificarsi affinché la retta di equazione $y = mx + n$ non passi per il quarto quadrante?

1) $m < 0, n > 0$

2) $m > 0, n < 0$

3) $m < 0, n < 0$

4) $m > 0, n = 0$

5) $m > 0, n > 0$ ←

Due rette di equazioni $y = mx$ e $y = nx$ sono tra loro sempre perpendicolari se:

1[^]) $mn = 1$

2[^]) $mn = -1$ 

3[^]) $m = n$

4[^]) $mn = 0,5$

5[^]) $m/n = 0,5$

In generale l'angolo γ tra 2 rette è determinato da $\text{tg } \gamma = (m-n)/(1+mn)$ che non è facile da ricordare. Oppure potete provare con la trigonometria perché se $m = \text{tg } \alpha$ avremo che $n = \text{tg}(\alpha + \pi/2)$.

...oppure ragionare trovando che il prodotto mn deve essere negativo....

Il coefficiente angolare di una retta e':

1[^]) l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse espresso in radianti

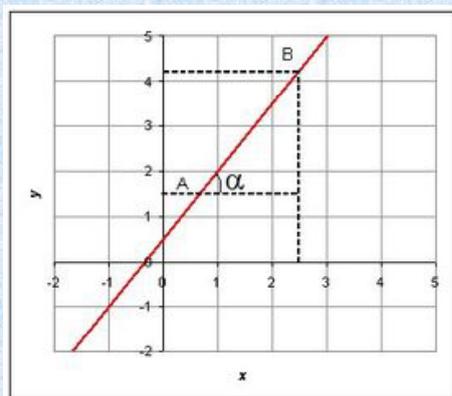
2[^]) l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ordinate espresso in radianti

3[^]) il seno dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse

4[^]) la tangente dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse

5[^]) il coseno dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse

In generale $m = \Delta y / \Delta x$ per cui



Il coefficiente angolare di una retta e':

- 1^) l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse espresso in radianti
- 2^) l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ordinate espresso in radianti
- 3^) il seno dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse
- 4^) la tangente dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse ←
- 5^) il coseno dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse

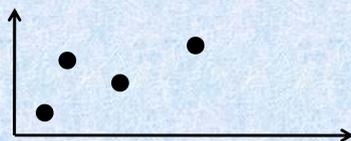
Quali dei seguenti punti sono fra loro allineati ? A(0,0); B(1,2); C(7,5); D(3,6)

- 1) A, B, C
- 2) B, C, D
- 3) solo A e B
- 4) A, B, D ←
- 5) A, C, D

Ricordare la definizione di coefficiente angolare di una retta.

"Allineati" si riferisce almeno a 3 punti: 2 punti sono sempre allineati.

Coeff. angolare = $\Delta y / \Delta x$. Lo si calcoli con due punti "facili" dei 4 forniti...

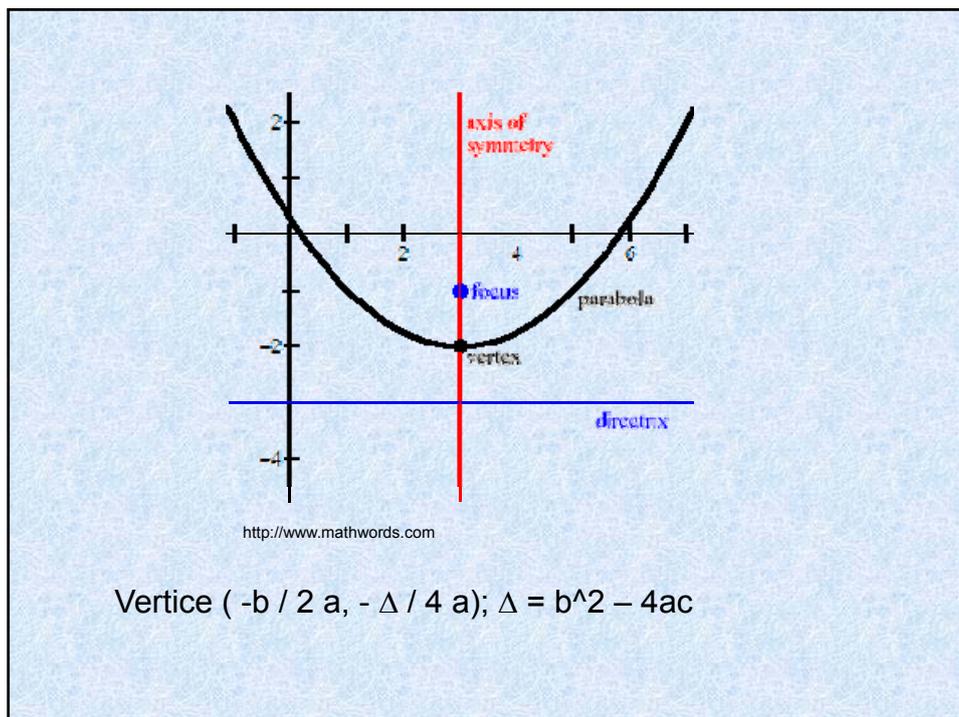


La parabola di equazione $y = -3x^2 + 3^{1/2}$:

- A) Non interseca l'asse delle ascisse
- B) Ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse
- C) Ha il vertice nel punto $(3^{1/2}, 0)$
- D) Ha il fuoco nel punto $(0, 3^{1/2})$
- E) Ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate

Conoscere le parabole. Provare prima la A) e la B): ci si potrebbe evitare di calcolare la posizione del fuoco o del vertice...

Ricordarsi che $3^{1/2}$ =radice di tre



La parabola di equazione $y = -3x^2 + 3^{1/2}$:

- A) Non interseca l'asse delle ascisse
- B) Ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse
- C) Ha il vertice nel punto $(3^{1/2}, 0)$
- D) Ha il fuoco nel punto $(0, 3^{1/2})$
- E) Ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate ←

Due rette che non si incontrano:

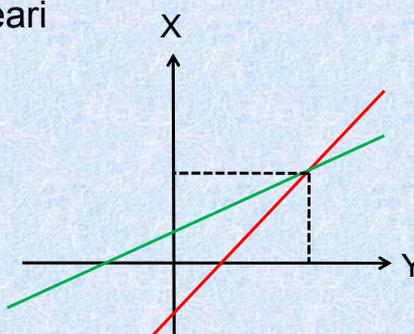
- 1) possono essere parallele ←
- 2) giacciono sicuramente in due piani diversi
- 3) giacciono sicuramente nello stesso piano
- 4) sono sicuramente parallele
- 5) non sono sicuramente parallele

E' piu' un esercizio di logica che di geometria...

Ricordarsi che le rette "vivono" nello spazio tridimensionale, in generale...

Sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ a'X + b'Y + c' = 0 \end{cases}$$



Se $a / a' = b / b'$ le due rette sono parallele → nessuna soluzione

**Se in piu' anche $c / c' = a / a' = b / b'$
allora le rette sono coincidenti → infinite soluzioni**

Un sistema è determinato se ha una ed una sola soluzione (x^*, y^*) .

Dei seguenti sistemi lineari uno solo è determinato (ha una ed una sola soluzione). Quale di essi?

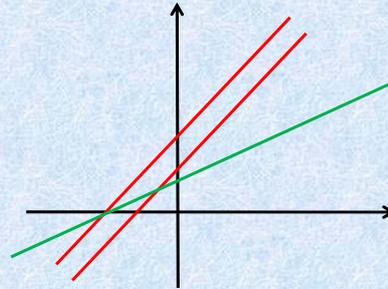
A) $\begin{cases} 2x - y - 9 = 0 \\ -x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ ←

B) $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{2}x = 2 - \frac{1}{2}y \end{cases}$

C) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

D) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

E) $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$



I casi B e C sono rette parallele
I casi D ed E sono rette coincidenti

Indicare tutti e soli i valori del parametro reale a per i quali il seguente sistema ammette soluzioni reali nelle incognite x e y .

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = a \\ 2^x - 3^y = 1 \end{cases}$$

- A) $a > 1$ ←
 B) $a \geq 1$
 C) $a > -1$
 D) $a \geq -1$
 E) ogni valore di a

$$K=3^y; H=2^x$$

$$K>0; H>0$$

$$H+K=a$$

$$H-K=1$$

$$H=(a+1)/2$$

$$K=(a-1)/2$$

$$a \geq 1$$

$$a \geq -1$$

Gli angoli di un triangolo sono in progressione aritmetica, e il maggiore è il doppio del minore; I valori in gradi sono:

1) 20, 30, 40

2) 40, 50, 80

3) 60, 90, 120

4) 40, 60, 80 ←

5) 45, 70, 95

Ricordarsi cosa vuol dire "progressione aritmetica".

Ricordarsi che è un triangolo: la somma dei 3 angoli "fa sempre 180 gradi"

Il rettangolo ABCD è inscritto in un quarto circonferenza. Quanto vale il segmento AC ?

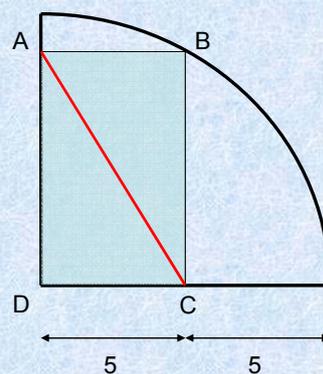
1^) 5 ←

2^) 5 moltiplicato radice di due

3^) 5 diviso radice di 2

4^) 10

5^) 7.5



Ricordarsi che ogni rettangolo ha 2 diagonali, e che esse sono uguali...

Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

A) $4^{2/3}$ ←

B) 4

C) 2

D) $4^{1/3}$

E) $2^{3/2}$

È in realtà un esercizio sulle potenze.

$$V = L^3$$

$$V_1 / V_2 = L_1^3 / L_2^3$$

$$S_1 / S_2 = L_1^2 / L_2^2$$

$$S_1/S_2 = (L_1/L_2)^2 = ((L_1/L_2)^3)^{2/3} = (V_1/V_2)^{2/3}$$

Probabilità

Definizione classica di Probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un **evento** è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili. (...)

Indicando con Ω l'insieme di casi possibili e con $|\Omega|=n$ la sua cardinalità, con A un evento e con n_A il numero dei casi favorevoli ad A (ad esempio, nel lancio di un dado $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n=6$, A = "numero pari", $n_A=3$), la probabilità di A , indicata con $P(A)$, è pari a:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dalla definizione segue che:

- la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso tra 0 e 1
- la probabilità dell'evento certo è pari a 1; se A = "numero compreso tra 1 e 6", $n_A=6$ e $n_A/n=1$
- la probabilità del verificarsi di uno di due **eventi incompatibili**, ovvero di due eventi che non possono verificarsi simultaneamente, è pari alla somma delle probabilità dei due eventi; se A = "numero pari", con $P(A) = 1/2$, e B = "esce il 3", con $P(B) = 1/6$, la probabilità che tirando un dado si ottenga un numero pari oppure un 3 è:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Nel gioco dei dadi, lanciando contemporaneamente due dadi, qual è la probabilità che si abbiano due facce con somma 7 ?

- 1) $1/3$
- 2) $1/7$
- 3) $1/6$ ←
- 4) $2/7$
- 5) $5/36$

Quanti sono gli eventi favorevoli e quanti gli eventi possibili ?

Nel gioco della roulette, come si sa, i numeri vanno da 0 a 36. Qual è la probabilità che il 17 esca due volte di fila:

- A) $1/(37 \times 37)$ ←
- B) $1/(37 \times 36)$
- C) $1/(36 \times 36)$
- D) $1/37 + 1/37$
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

La risposta D) sarebbe stata giusta se la domanda fosse stata:

“Qual è la probabilità che possa uscire (in una sola giocata) il 17 oppure il 18 ?”

Qual è la probabilità che un numero a due cifre abbia per somma delle cifre il valore 12 ?

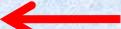
- 1) $7/99$
- 2) $2/90$
- 3) $2/10$
- 4) $7/90$ 
- 5) $12/100$

Quanti sono gli eventi favorevoli e quanti gli eventi possibili ?

I numeri a due cifre vanno da 10 a 99 quindi sono 90

Casi favorevoli: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93

Una coppia vuole avere due figli dello stesso sesso: quanti figli deve avere per essere sicura che almeno due siano dello stesso sesso ?

- 1) 2
- 2) 3 
- 3) 4
- 4) Non si può stabilire
- 5) Più di 4

Se il primo figlio sarà maschio, il secondo potrebbe essere femmina, ma il terzo...

Analogo ragionamento se si suppone che il primo sia femmina...

La probabilità che lanciando simultaneamente due dadi si ottengono due numeri la cui somma vale 11 è, rispetto alla probabilità che si ottengano due numeri la cui somma vale 10:

- 1) non paragonabile, perché si tratta di eventi diversi
- 2) minore 
- 3) maggiore
- 4) uguale
- 5) circa doppia

Nei due casi, il numero di eventi possibili è lo stesso, quindi la domanda equivale a chiedere:

Quante sono le possibilità (casi favorevoli) di fare 11 ? E di fare 10 ?