UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Scienze della Salute Umana

PRECORSO 2024

MATEMATICA

Franco Fusi

Dipartimento di Scienze Biomediche, Sperimentali e Cliniche «Mario Serio»

Matematica

Insiemi numerici e algebra: numeri naturali, interi, razionali, reali. Ordinamento e confronto; ordine di grandezza e notazione scientifica. Operazioni e loro proprietà. Proporzioni e percentuali.

Potenze con esponente intero, razionale) e loro proprietà. Radicali e loro proprietà.

Logaritmi (in base 10 e in base e) e loro proprietà. Cenni di calcolo combinatorio. Espressioni algebriche, polinomi. Prodotti notevoli, potenza n-esima di un binomio, scomposizione in fattori dei polinomi. Frazioni algebriche.

Equazioni e disequazioni algebriche di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni. Funzioni: nozioni fondamentali sulle funzioni e loro rappresentazioni grafiche (dominio, codominio, segno, massimi e minimi, crescenza e decrescenza, ecc.). Funzioni elementari: algebriche intere e fratte, esponenziali, logaritmiche, goniometriche. Funzioni composte e funzioni inverse. Equazioni e disequazioni goniometriche.

Geometria: poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misure di lunghezze, superfici e volumi. Isometrie, similitudini ed equivalenze nel piano. Luoghi geometrici. Misura degli angoli in gradi e radianti.

Trigonometria: Seno, coseno, tangente di un angolo e loro valori notevoli. Formule goniometriche. Risoluzione dei triangoli. Sistema di riferimento cartesiano nel piano. Distanza di due punti e punto medio di un segmento.

Equazione della retta. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità. Distanza di un punto da una retta.

Equazione della circonferenza, della parabola, dell'iperbole, dell'ellisse e loro rappresentazione nel piano cartesiano. Teorema di Pitagora. Teoremi di Euclide (primo e secondo).

Probabilità e statistica: distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere e principali rappresentazioni grafiche. Nozione di esperimento casuale e di evento. Probabilità e frequenza.

MATEMATICA	MEDICINA
	% occorrenza
Proporzioni e Percentuali	7,5
Potenze e radici	12,0
Logaritmi	9,0
Equazioni	14,3
Disequazioni	3,8
Trigonometria	8,3
Figure Piane	12,0
Solidi	2,3
Le rette	4,5
Parabola, iperbole, ellisse, circonferenza	4,5
Probabilita' calc combinat	9,8
Valor medio	3,0
Varie:	16,5

Elevamento a potenza.

L'esponente è sempre un intero maggiore di 1, a meno che non si precisi il contrario. Il significato di esponenti interi negativi è dato dalla definizione:
$a^{-n}=1/(a^n)$

la definizione di potenza si completa ponendo
$a^1=a,\qquad a^0=1;$
$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, da cui $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ con m e n interi.

Le precedenti formule sono tutte pienamente giustificate dalle seguenti proprietà delle potenze:

$$\Longrightarrow \quad a^m \times a^n = a^{m+n},$$

cioè il prodotto di due potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha come esponente la somma degli esponenti;

$$\Longrightarrow \quad a^m / a^n = a^{m-n},$$

cioè il quoziente di due potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha come esponente la differenza degli esponenti (di solito $m>n$, ma è anche possibile che sia $m=n$ oppure $m<n$ e allora si giustificano le definizioni viste sopra);

$$\Longrightarrow \quad (a^m)^n = a^{n \cdot m},$$

cioè la potenza di una potenza è una potenza della stessa base che ha come esponente il prodotto degli esponenti.

Utili per i calcoli sono anche le altre proprietà:

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n,$$

cioè il prodotto di due potenze dello stesso esponente è una potenza che ha come base il prodotto delle basi e come esponente lo stesso esponente;

$$a^n / b^n = (a/b)^n,$$

il cui significato è evidente.

Formule notevolmente più complicate valgono quando l'esponente è un numero complesso.

Le operazioni inverse dell'elevamento a potenza sono

- l'estrazione di *radice*, che si fa quando sono note la potenza e l'esponente e si vuole determinare la base,
- e la ricerca del *logaritmo,* che si fa quando sono note la potenza e la base e si vuol determinare l'esponente.

81. Quale è il risultato corretto della seguente operazione aritmetica?
X = 23,45 * 0,0123

A) X = 0,288439
B) X = 0,288438
C) X = 0,288437
D) X = 0,288436
E) X = 0,288435

Quale dei valori sotto riportati costituisce la migliore approssimazione della radice quadrata di 814.420 ?
A) 90
B) 900
C) 9000
D) 81442
E) 407270

Il modo più semplice per rispondere alla domanda non è calcolare la radice quadrata di 814.420, ma è ragionare per approssimazioni. In particolare sceglieremo un numero prossimo a quello dato di cui facilmente possiamo determinare la radice quadrata. Ad esempio il numero 810.000 è una buona approssimazione di 814.420 e, se lo scriviamo come $81 * 10^4$, facilmente troveremo la risposta alla domanda:

$81*10^4 = 9 *10^2 = 900$

La risposta esatta è quindi la B.

79. La potenza $((X^2)^4)^5$ è uguale a:

A) X^{10}
B) X^{30}
C) X^6
D) X^{40}
E) X^{11}

53. $\sqrt{18}+\sqrt{32}$ **è uguale a :**

A) $\sqrt{50}$

B) $2\sqrt{20}$

C) 10

D) $\sqrt{98}$

E) $20\sqrt{2}$

75. La soluzione dell'equazione $\sqrt{4+\sqrt{4+x}}=4$ **è:**

- **A) -4**
- **B) 12**
- **C) -140**
- **D) 4**
- **E) 140**

Definizione di logaritmo :

*Si definisce **logaritmo** di un numero positivo in una data base, diversa da uno, l'esponente che si deve attribuire alla base per ottenere il numero.*

p.es., il il logaritmo in base 2 di 8 è 3; infatti, $2^3=8$.

In generale, per indicare il logaritmo in base *a* di un numero *c* si scrive: $\log_a c$, con $c>0$, *a* reale positivo diverso da 1
Sono anche usati i seguenti simboli:

- ln c e log c, i quali indicano il logaritmo in cui la base è il numero di Nepero ***e***, detto logaritmo naturale o logaritmo neperiano;
- Log c e Lg c, che indicano il logaritmo in base 10 di c, detto anche logaritmo decimale

Si ha in particolare: $\log_a.1=0$, essendo $a^0=1$; $\log_a a=1$, da $a^1=a$;

Si possono dimostrare le le seguenti proprietà:

- $\log (AB)= \log A + \log B$
- $\log A/B = \log A - \log B$
- $\log A^K = K \log A$

Queste proprietà sono estremamente utili nei calcoli perché facilitano la risoluzione di certe espressioni numeriche o permettono di eseguire calcoli per i quali non esistono semplici procedimenti aritmetici;

Per il cambiamento della base nei **logaritmi** vale la seguente relazione:

$\log_j k = (\log_a k) / (\log_a j)$

Se la base è un numero maggiore di 1, i numeri maggiori di 1 hanno logaritmi positivi; l'inverso si ha se la base è un numero compreso tra 0 e 1

I sistemi di logaritmi più usati in matematica sono quello dei logaritmi naturali, aventi per base il numero reale ***e***=2,718281..., noto come di Nepero e quello dei logaritmi decimali aventi base 10 (solitamente usato nei calcoli).

I logaritmi sono in genere numeri irrazionali; la parte intera del logaritmo di un numero è detta caratteristica, la parte decimale è detta mantissa.

Per determinare il logaritmo in base dieci di un numero maggiore di 1 è necessario tener presente che :
Log 1=0, Log 10=1, Log 100=2, Log 1000=3, e così via, per cui la caratteristica dei numeri compresi tra 1 e 10 è 0, dei numeri compresi tra 10 e 100 è 1,
in generale la caratteristica di N, dove N è un numero la cui parte intera è costituita di *n* cifre, è uguale a *n-1*.
Per determinare la mantissa si usano le tavole logaritmiche; esse riportano, generalmente con 5 cifre, la mantissa dei numeri compresi tra 1 e 10.000. Per i numeri maggiori di 10.000 la mantissa viene calcolata mediante interpolazione lineare.

Si dimostra che moltiplicando o dividendo un numero per una potenza qualunque di 10, la mantissa del logaritmo non cambia. Perciò, p.es., i numeri 1,37; 13,7; 0,137; 137, ecc. hanno tutti la stessa mantissa.

Per determinare il logaritmo decimale dei numeri positivi minori di 1, si deve tener presente che :
Log 0,1= -1, Log 0,01= -2, Log 0,001= -3, ecc., per cui la caratteristica dei logaritmi dei numeri compresi tra.0,1 e 1 è -1, dei numeri compresi tra 0,01 e 0,1 è -2, dei numeri compresi tra 0,001 e 0,01 è -3 e così via.

Log 1	= 0	$10^0 = 1$
Log 10	= 1	$10^1 = 10$
Log 100	= 2	$10^2 = 100$
Log 1000	= 3	$10^3 = 1000$

Log 0,1	= -1	10^{-1} =0,1
Log 0,01	= -2	10^{-2} =0,01
Log 0,001	= -3	10^{-3} =0,001
	Log 0 = infinito	

Poiché la funzione y(x) =Log(x) varia molto più lentamente di y(x) =x, si può utilizzare questa proprietà per rappresentare funzioni con un campo di variabilità molto estese

51. L'espressione $\log(x^2)$ equivale a :

A) $2\log x$

B) $\log 2$

C) $2\log|x|$

D) $\log \sqrt{x}$

E) $\log 2|x|$

89- In base alla definizione generale di logaritmo di un numero in una certa base, quanto vale il logaritmo del numero 0,0001 in base 100 (cento) ?

A) 0,01
B) + 2
C) - 2
D) + 4
E) - 4

Il numero 0,0001 può essere scritto nella forma $1 * 10^{-4}$ o anche 100^{-2} . Cercare il logaritmo in base 100 del numero 0,0001 ($\log_{100} 100^{-2}$) significa cercare l'esponente di quella potenza di 100 che vale 0,0001. E' chiaro quindi che
$\log_{100} 100^{-2} = -2$ (risposta C corretta).
Il numero 0,01 è il $\log_{100} 100^{0.01}$ cioè è il logaritmo in base 100 del numero $100^{0.01}$ (risposta B errata).
Il numero +2 è il $\log_{100} 100^{2}$ cioè è il logaritmo in base 100 del numero 10.000 (risposta B errata).
Il numero +4 è il $\log_{100} 100^{4}$ cioè è il logaritmo in base 100 del numero 100.000.000 (risposta D errata).
Il numero -4 è il $\log_{100} 100^{-4}$ cioè è il logaritmo in base 100 del numero 0,00000001 (risposta E errata).

1) Quale fra le seguenti espressioni è uguale a $\log 9x^2$?

a) $2\log 9x$;

b) $9\log x$;

c) $2\log 3x$;

d) $\log 9+\log x$;

2) Il logaritmo in base 10 di 1000 è uguale a:

a) 2;

b) 3;

c) 1;

d) –3.

3) L'equazione $\log(x+3)=\log(x+2)$:

a) ha come soluzione –1;

b) ha per soluzione 1;

c) è impossibile;

d) è indeterminata;

4) La base del logaritmo deve essere:

a) negativa;

b) uguale a 1;

c) positiva;

d) positiva e diversa da 1;

DISUGUAGLIANZE_DISEQUAZIONI

La Disuguaglianza è la relazione che intercorre tra due numeri reali a e b quando si confrontano e si riscontra che essi non sono uguali.

Si ha allora che o a è maggiore di b ($a>b$), o a è minore di b ($a<b$).

Se è $a>b$, allora esiste un numero reale tale che $a=b+c$ e, analogamente,
se è $a<b$, esiste c tale che $a+c=b$.

Se si hanno da confrontare più di due numeri reali a, b, c,..., d, si può procedere mettendoli in ordine crescente iniziando dal più piccolo e via via fino al più grande; si ottiene così una catena di d. che si scrive $a<b<c<...<d$. Si ottiene una catena analoga se si dispongono in ordine decrescente.

Per le disuguaglianze valgono i seguenti teoremi, che costituiscono altrettante regole di calcolo:

A) se $a>b$ e $b>c$, allora si avrà $a>c$;
B) se $a>b$ e $c>d$, allora si avrà $a+c>b+d$ e, inoltre: $a+c>b+c$;
C) se $a>b$ e $c>0$, allora è $ac>bc$, ma, se $c<0$, allora è $ac<bc$;
D) se $a>b$ e $c>d$, allora è $a-d>b-c$ e, inoltre, $a-c>b-c$;
E) se $a>b>0$ e $c>d>0$, allora è $ac>bd$;
F) se $a>b>0$ e $c>d>0$, allora si avrà $a/d>b/c$ e, inoltre, $1/d>1/c$.

Da questi teoremi discendono altre regole per operare sulle d.: p. es., se si scambiano tra loro i due membri di una d. bisogna scambiare anche il segno maggiore in minore, e viceversa, cioè bisogna invertire il senso della disuguaglianza.

Risolvere una disuguaglianza in una o più incognite significa determinare tutti quei valori delle incognite che sostituiti in essa la rendono un'effettiva disuguaglianza.

Per sistema di disuguaglianze si intende un insieme di disuguaglianze da risolvere contemporaneamente; si parla di sistema misto se si ha un insieme di equazioni e disuguaglianze che devono essere soddisfatte dalle stesse incognite. Tra le disuguaglianze in una sola incognita si hanno:

A) *disuguaglianza di primo grado*, riconducibili alla forma $ax>b$ con le usuali regole di calcolo sulle disuguaglianze; in tal caso se $a>0$ la disuguaglianza è soddisfatta da ogni $x>b/a$, se $a<0$ da $x<b/a$.

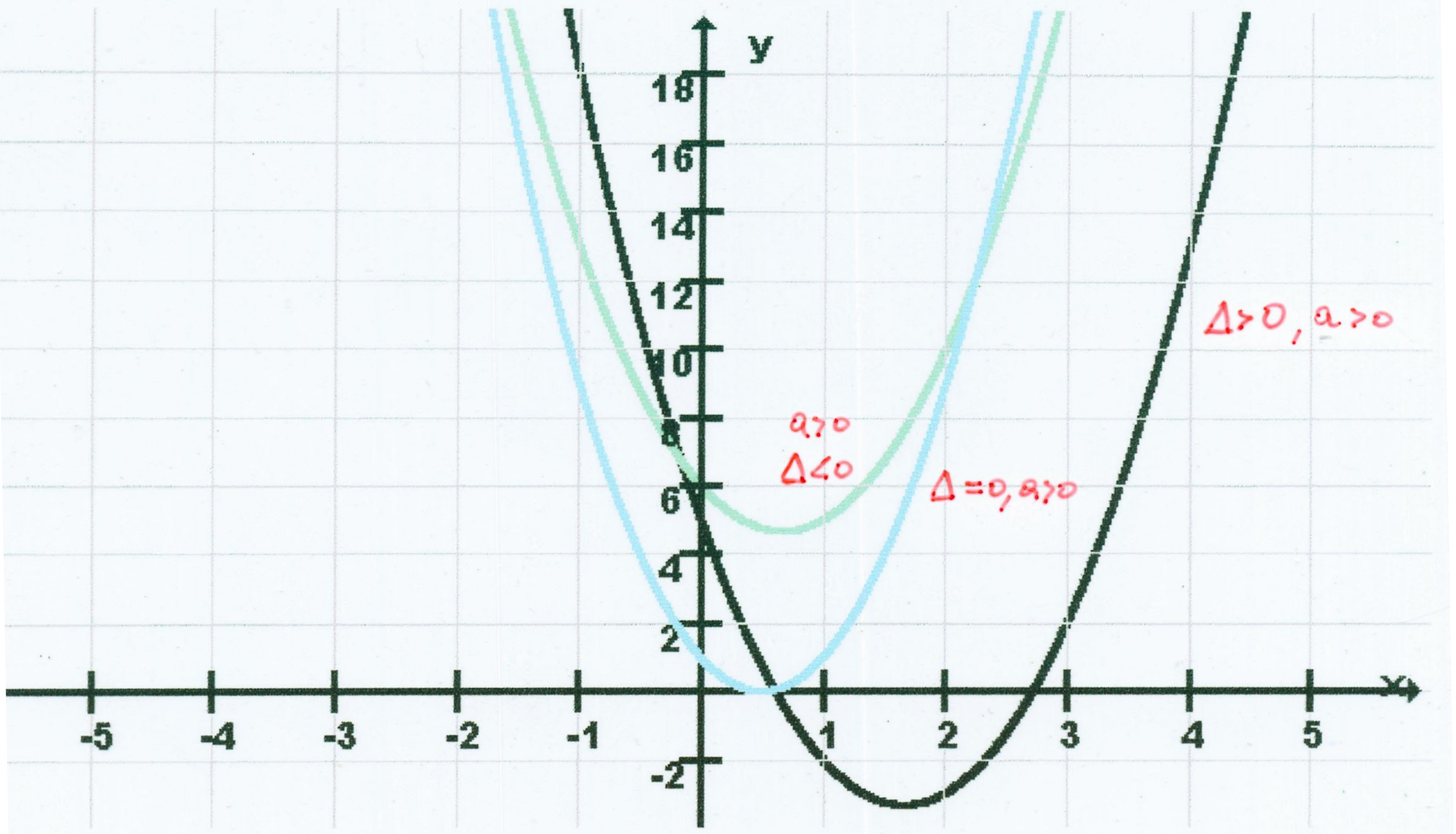
B) ***disuguaglianza di secondo grado***, riconducibili alla forma $ax^2+bx+c>0$; lo studio di questa disuguaglianza si può ricondurre allo studio della *parabola* $y=ax^2+bx+c$ nel piano (metodo grafico).

Se $a>0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto; si distinguono allora tre casi;

1) la parabola non incontra l'asse x (ciò avviene se $\Delta=b^2-4ac<0$): in tal caso la parabola si trova nel semipiano delle y positive, quindi ogni x è soluzione della disuguaglianza;
2) la parabola incontra l'asse delle x in un punto x_0($\Delta=0$):
   tutti i punti della parabola, escluso il punto x_0, si trovano nel semipiano delle y positive, quindi le soluzioni della disuguaglianza sono tutte le x diverse da x_0;

3) la parabola incontra l'asse delle x nei punti x_1 e x_2 ($\Delta>0$), le soluzioni sono date da tutte le x tali che $x<x_1$ oppure $x>x_2$. Se $a<0$, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso; anche in questo caso si distinguono tre casi che dipendono dal segno di Δ; si hanno le curve ($\Delta<0$), ($\Delta=0$), ($\Delta>0$). Le soluzioni si determinano in modo analogo ai tre casi precedenti: nel caso ($\Delta<0$), non si hanno soluzioni, nel caso ($\Delta=0$), si ha un'unica soluzione uguale a x_0, nel caso ($\Delta>0$). le soluzioni sono date da tutte le x tali che $x_1<x<x_2$.

ax^2+bx+c


y
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
$a>0$
$\Delta<0$
$\Delta=0, a>0$
$\Delta>0, a>0$

C) *disuguaglianze frazionarie*, riconducibili alla forma $P(x)/Q(x)>0$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi in x di secondo grado; si risolvono applicando il metodo descritto in B) e considerando le due funzioni $y=P(x)$ e $z=Q(x)$ e determinando i punti (gli intervalli) in cui P e Q hanno lo stesso segno e quelli in cui hanno segni diversi.

D) *Sistema di due disuguaglianza di primo grado*, cioè riconducibili alla forma

$x>a$

$x>b$

le soluzioni sono tutti gli x maggiori del massimo tra a e b. Se si presentano nella forma

$x>a$

$x<b$

il sistema ammette soluzioni se e solo se $b>a$.

E) Sistema misto del tipo

$x>a$

$ax^2+bx+c=0$

si determinano le eventuali soluzioni della disuguaglianza e si verifica se esse soddisfano la disequazione.

x e y sono due numeri reali positivi tali che $y<x$. Di conseguenza:

A) $x^2 < xy$

B) $y + x < x + y$

C) $1 > x / y$

D) $1 < x / y$

E) $y < x^2$

Se x e y sono due numeri reali positivi tali che y è minore di x, la risposta A, che si ottiene moltiplicando entrambi i membri della disequazione per il numero x (più grande), non può essere esatta poiché ha il verso della disequazione invertito. I due membri della disequazione della risposta B sono uguali per la proprietà commutativa dell’addizione, quindi varrà $y+x = x+y$ (risposta B errata). La risposta E sarebbe sempre verificata se almeno il numero x fosse maggiore di 1, ma poiché il testo non dà questa informazione, la risposta non può essere considerata <u>sempre corretta</u>. Considerando infine le risposte C e D si può osservare che, moltiplicando entrambi i termini delle disequazioni per y (operazione che non cambia il verso della disequazioni poiché y è un numero positivo), si ottiene per C: $y > x$ (risposta sbagliata perché nega l’ipotesi) e per D: $y < x$.

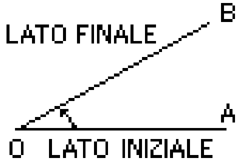


Figura 1A

Figura 1B

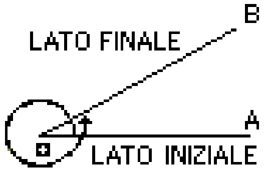


Figura 1C

Trigonometria:

Ramo della matematica che studia le relazioni che sussistono tra i lati e gli angoli di un triangolo.

Fondamentale nell'ambito della trigonometria è il concetto di angolo trigonometrico. Questo tipo di angolo è generato dalla rotazione di un raggio vettore, ad esempio OB, intorno a un punto fisso O. Osserviamo le figure 1a, 1b e 1c: l'angolo è determinato dalla rotazione del raggio OB, che inizialmente coincide con OA, intorno al punto fisso O. Per convenzione, un angolo e la sua ampiezza vengono considerati con il segno positivo se sono generati da una rotazione in senso antiorario, e con il segno negativo se sono generati da una rotazione in senso orario. Due angoli trigonometrici sono invece uguali se le rotazioni che li hanno generati sono concordi nella direzione e hanno uguale ampiezza.

L'ampiezza di un angolo si misura in relazione alla lunghezza dell'arco che i suoi lati "staccano" sulla circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo stesso. In figura 2 l'arco è rappresentato con *s*.

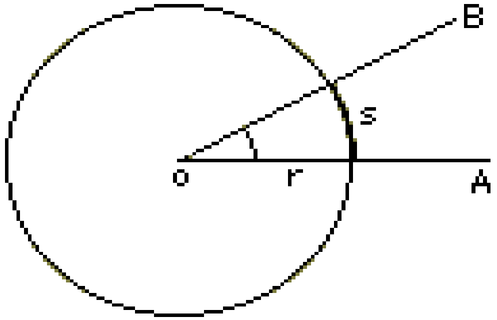


Figura 2

L'unità di misura convenzionalmente adottata per gli angoli è il grado sessagesimale, che viene indicato con il simbolo °, ed è definito come *l'ampiezza dell'angolo che sottende un arco di lunghezza pari a 1/360 volte la lunghezza della circonferenza*. Se l'arco *s* (*AB*) sotteso dall'angolo è pari alla quarta parte di una circonferenza C, cioè se risulta s = 1/4 *C*, *OA* risulta perpendicolare a *OB* e l'angolo misura 90° (angolo retto); se invece *s* = ½ *C*, i punti *A*, *O* e *B* sono allineati e l'angolo misura 180° (angolo piatto).

Quando risulta $s = 1/2\pi\ C$, cioè quando *l'arco sotteso ha la stessa lunghezza del raggio della circonferenza*, l'ampiezza dell'angolo assume un valore particolare, detto **radiante**. La relazione che permette di esprimere in gradi una misura in radianti, e viceversa, può essere determinata facilmente poiché

1 angolo piatto = 2 angoli retti = 180° = π radianti

quindi

1 radiante = 180°/π, e analogamente 1° = π/180.

Ogni grado è suddiviso in 60 parti uguali, dette minuti, ciascuna delle quali è a sua volta suddivisa in 60 secondi. I minuti e i secondi sono indicati con i simboli ' e " rispettivamente; mentre per le misure in radianti, o in sottomultipli del radiante, si può usare l'abbreviazione *rad* oppure si può omettere qualunque simbolo. Così si scrive

$$61°28'42{,}14'' = 1{,}073 \text{ rad} = 1{,}073$$

Per convenzione, un angolo trigonometrico generico si indica con la lettera dell'alfabeto greco theta (θ). Se l'ampiezza di θ è espressa in radianti, la lunghezza dell'arco sotteso s è fornita in modo immediato dalla formula $s = r\theta$; se invece essa è in gradi, bisogna ricorrere alla relazione di trasformazione definita sopra e si ha

$$s = \frac{\pi r}{180}\theta$$

Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche stabiliscono una particolare relazione tra i numeri reali e i possibili valori dell'ampiezza di un angolo. Bisogna ricordare che un angolo posto in un sistema di riferimento di assi cartesiani si dice in posizione standard, se il suo vertice coincide con l'origine degli assi e se il raggio vettore, nella posizione iniziale, giace sul semiasse positivo delle *x*.

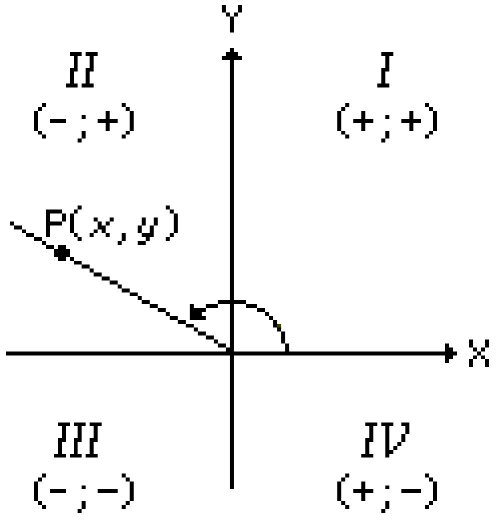


Figura 3

Per definire le principali funzioni trigonometriche, consideriamo un punto *P* avente coordinate *x* e *y* e appartenente alla semiretta uscente dall'origine e inclinata di un angolo generico θ rispetto al semiasse positivo delle *x*. Possiamo osservare che benché l'ascissa e l'ordinata di *P* siano positive o negative a seconda dal quadrante (I, II, III o IV) in cui esso si trova (vedi figura 3), la distanza di *P* dall'origine degli assi, che indichiamo con *r*, è invece necessariamente positiva e può essere calcolata facilmente applicando il

teorema di Pitagora: $r = \sqrt{(x2 + y2)}$.

Le sei funzioni trigonometriche più comuni sono allora definite come segue:

$$\text{seno dell'angolo } \theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\text{coseno dell'angolo } \theta = \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangente dell'angolo } \theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotangente dell'angolo } \theta = \operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$

$$\text{secante dell'angolo } \theta = \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{cosecante dell'angolo } \theta = \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$

Dal momento che le due coordinate *x* e *y* non variano se si considerano angoli che differiscono tra loro di multipli interi di 2π radianti, cioè di 360°, è chiaro che, ad esempio, $sen\ (\theta + 2\pi) = sen\ \theta$, e che ciò vale anche per le altre cinque funzioni.

Se il punto *P* appartiene all'asse delle *y*, risulta *x* = 0; di conseguenza, essendo la divisione per zero un'operazione priva di significato in matematica, non sono definite la tangente e la secante di 90°, 270°, - 270°, e in generale di angoli che differiscono da questi per multipli interi di 2π. Analogamente, quando *P* appartiene all'asse delle *x*, risulta *y* = 0, quindi non sono definite la cotangente e la cosecante di angoli quali ad esempio 0°, 180° e -180°. Poiché *r* non può mai essere nullo, il seno e il coseno sono funzioni definite per ogni valore dell'angolo. Inoltre, essendo *r* sempre maggiore o uguale a ciascuna delle due coordinate *x* e *y*, i valori di $sen\ \theta$ e $cos\ \theta$ variano tra -1 e +1; ciò implica che $sec\ \theta$ e $cosec\ \theta$ assumono tutti i valori reali esterni all'intervallo (-1, 1), cioè tutti i valori maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a -1. Le funzioni $tg\ \theta$ e $cotg\ \theta$ invece sono illimitate, cioè possono assumere qualunque valore reale.

Si può facilmente mostrare che i rapporti che definiscono le funzioni trigonometriche dipendono unicamente dall'ampiezza dell'angolo e non dalla lunghezza di *r*.

Supponiamo ora che θ sia uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo avente il vertice *A* posto nell'origine degli assi di figura 3, il lato *AC* lungo il semiasse positivo delle *x* e il vertice *B* coincidente con il punto *P*, in modo che risulti *AB* = *AP* = *r*. Allora, applicando le definizioni date sopra, si ottengono le relazioni $sen\ \theta = y/r = a/c$, e, in generale,

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{cateto opposto}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto opposto}} = \frac{c}{a}$$

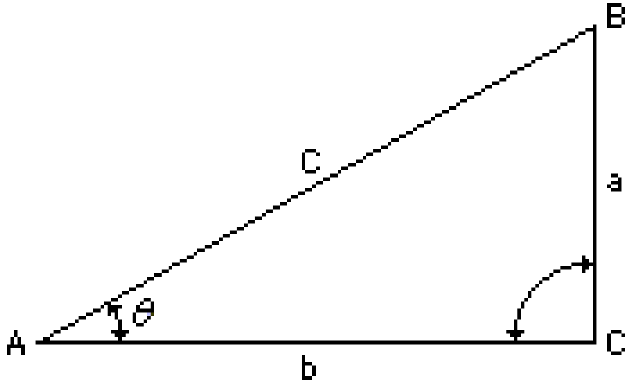
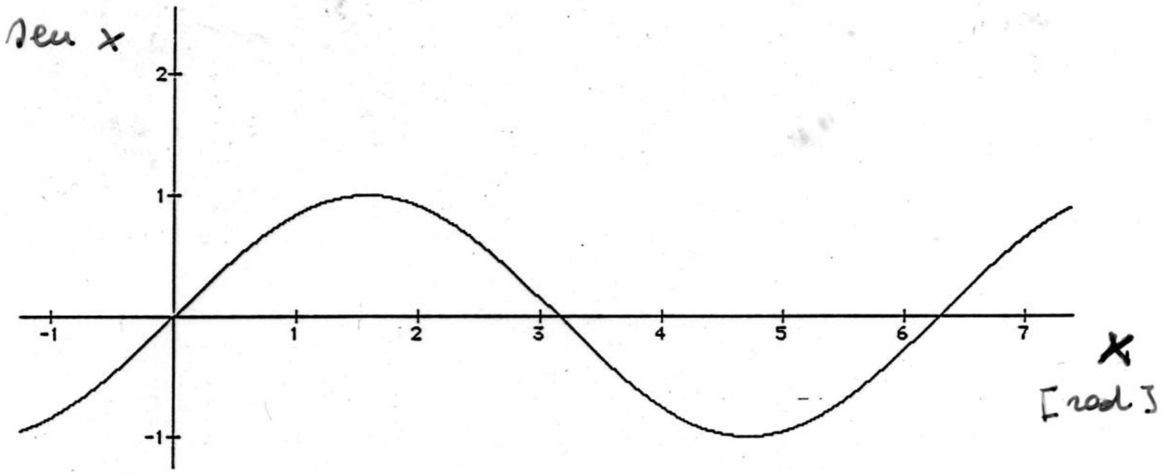
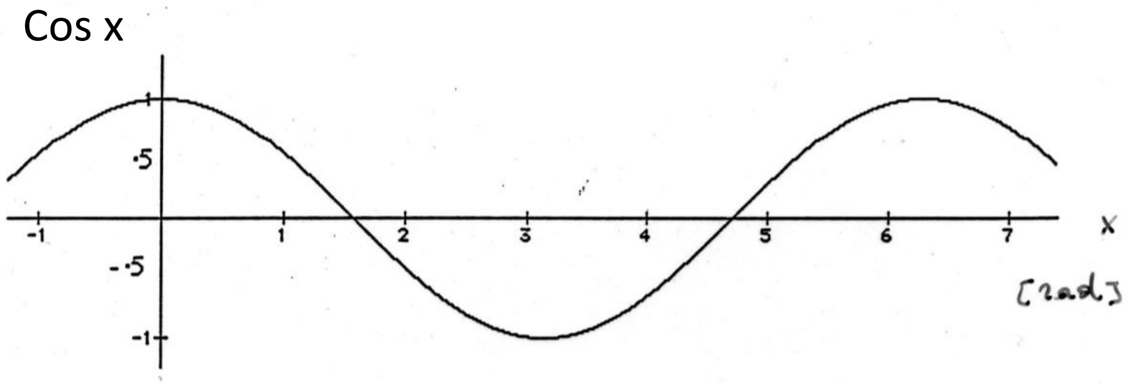


Figura 4

Queste relazioni permettono di "risolvere" ogni triangolo rettangolo, cioè di calcolare la lunghezza di tutti i lati e l'ampiezza di tutti gli angoli, purché sia nota la misura di un angolo e di un lato. I valori numerici delle funzioni trigonometriche sono riportati in apposite tavole, tuttavia essi possono essere determinati approssimativamente per via grafica; per fare ciò bisogna disegnare l'angolo in posizione standard usando un righello, un compasso e un goniometro, misurare x, y, ed r, e infine calcolare i rapporti desiderati. In realtà poi, sfruttando le identità trigonometriche (vedi sotto), è sufficiente determinare il valore di *sen* θ e di *cos* θ per calcolare il valore di tutte le funzioni trigonometriche di θ e degli angoli a esso associati. Per alcuni angoli particolari, i valori numerici delle funzioni trigonometriche sono facilmente determinabili in base a considerazioni geometriche. Ad esempio, in un triangolo rettangolo isoscele sappiamo che $\theta = 45°$ e che $b = a$. Inoltre, per il teorema di Pitagora, $c2 = b2 + a2$, da cui si può dedurre che $c2 = 2a2$ o $c = a\sqrt{2}$. Perciò:



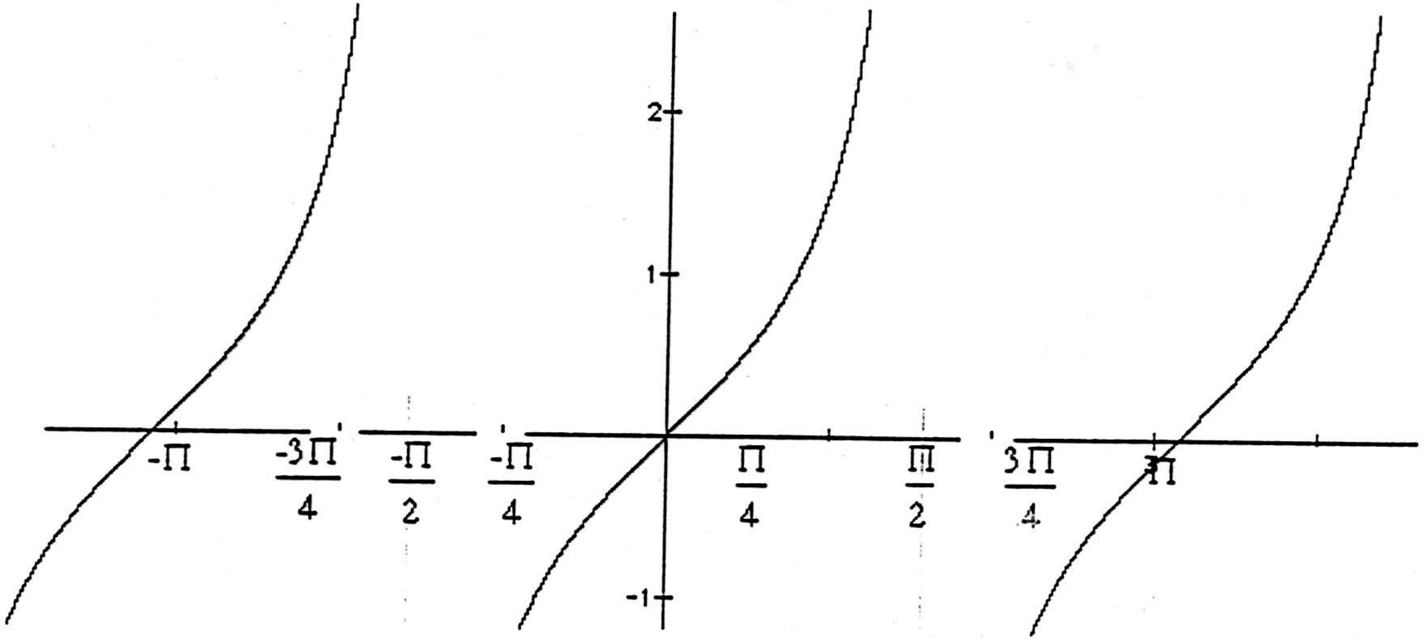


Graph of Sine **:Use a table of values or the unit circle**

θ	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Cos θ	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1

θ	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
Tan θ	0	1	$\to\infty$	-1	0	1	$\to\infty$	-1	0.

Graph of Tan



$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{tg } 45° = \text{cotg } 45° = 1;$$

$$\sec 45° = \text{cosec } 45° = \sqrt{2}$$

Identità trigonometriche

Le formule che seguono, dette identità trigonometriche, esprimono le relazioni che sussistono tra le funzioni trigonometriche, e valgono per tutti i valori dell'angolo θ, o dei due angoli θ e ϕ:

Le formule del gruppo V, note come formule di riduzione, permettono di esprimere *sen* θ e *cos* θ in termini del seno e del coseno di angoli compresi tra 0° e 90°. Con le formule dei gruppi I e II invece, è possibile determinare *tg* θ, *cotg* θ, *sec* θ, e *cosec* θ a partire dal valore di *sen* θ e *cos* θ. Perciò, per conoscere tutti i valori che le varie funzioni trigonometriche assumono in corrispondenza di un generico angolo θ è sufficiente tabulare i valori di *sen* θ e *cos* θ per gli angoli appartenenti al primo quadrante, cioè per gli angoli θ compresi tra 0° e 90°. In realtà comunque, per maggior semplicità vengono riportati generalmente anche i valori delle altre funzioni trigonometriche, in corrispondenza allo stesso intervallo di valori di θ.

Le figure allegate rappresentano l'andamento delle funzioni trigonometriche al variare dell'angolo. Si intuisce immediatamente dall'osservazione dei grafici che esse sono periodiche, vale a dire assumono ciclicamente gli stessi valori, a intervalli costanti, che vengono detti periodi. Per tutte le funzioni trigonometriche, il periodo è di 360°, o 2 π radianti; costituiscono un'eccezione la tangente e la cotangente che hanno periodo di 180°, o π radianti.

I. $\text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

II. $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$; $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{1}{\text{tg}\,\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$;

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$; $\text{cosec}\,\theta\ \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$.

E inoltre:

III. $\text{sen}\,(\theta \pm y) = \text{sen}\,\theta\cos y \pm \cos\theta\,\text{sen}\,y$

IV. $\cos\,(\theta \pm y) = \cos\theta\cos y \mp \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,y$

$\text{sen}\,\theta = -\,\text{sen}\,(-\theta)$; $\cos\theta = \cos(-\theta)$

V. $\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(180° - \theta) = \cos\,(90° - \theta)$

$\cos\theta = -\cos\,(180° - \theta) = \text{sen}\,(90° - \theta)$

Funzioni inverse

Affermare che *y* è il seno di θ, o *y* = *sen* θ è equivalente a dire che θ è l'angolo il cui seno è pari a *y*; ciò si scrive simbolicamente θ = *arc sen y* o θ = *sen-1 y*. La funzione *arc sen y*, che associa al numero reale *y* l'angolo θ, è detta funzione inversa della funzione *f*(θ) = *sen* (θ). Le funzioni inverse *arc cos y*, *arc tg y*, *arc cotg y*, *arc sec y*, *arc cosec y*, sono definite in modo analogo. A causa della periodicità delle funzioni trigonometriche però, le relazioni *y* = *sen* θ, o θ = *arc sen y*, non individuano un solo valore di θ per ogni valore di *y*, ma infiniti. Infatti, *sen* 30° = *sen* 150° = *sen* (30° + 360°) = *sen* (150° + 360°). . .= ½; perciò, se θ = *arc sen* ½, risulta θ = 30° + *n*360° e θ = 150° + *n*360°, dove *n* può assumere qualunque valore intero positivo, negativo o nullo. Per specificare in modo univoco le funzioni inverse è pertanto necessario limitare il dominio delle funzioni dirette entro un certo intervallo del campo di definizione (asse reale).

Il triangolo generico

Le applicazioni pratiche della trigonometria consistono spesso nel calcolo di lunghezze per le quali non sono possibili misure dirette. Questo problema può essere risolto facendo sì che la lunghezza incognita sia uno dei lati di un triangolo di cui si conoscano gli altri due lati e un angolo, e quindi applicando le formule sotto riportate.

Detti *A*, *B*, *C* i tre angoli di un triangolo e *a*, *b*, *c* i lati rispettivamente opposti, si può dimostrare che valgono le relazioni

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \text{(Teorema dei seni)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{(Teorema dei coseni)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)} \quad \text{(Teorema delle tangenti)}$$

I teoremi del coseno e delle tangenti possono essere enunciati in due forme equivalenti, permutando, cioè facendo scorrere ordinatamente, le lettere *a*, *b*, *c* e *A*, *B*, *C*.

Questi tre teoremi possono essere applicati per determinare tutti gli elementi di un qualunque triangolo quando siano noti, alternativamente: un lato e due angoli; due lati e l'angolo compreso; due lati e l'angolo opposto a uno di essi; o, infine, tutti e tre i lati. Nel caso particolare di un triangolo rettangolo, il discorso viene semplificato dal fatto che un angolo ha sempre ampiezza nota e pari a 90°, o π/2 radianti, cosicché è sufficiente conoscere un lato e un angolo, o equivalentemente due lati, per determinare tutti gli elementi del triangolo.

I valori assunti dalla funzione $y = f(x) = 1+\text{sen}^2(x)$ sono:

A) $0 < y < 1$
B) $0 \leq y \leq 1$
C) $1 < y < 2$
D) $1 \leq y \leq 2$
E) $-1 \leq y \leq 1$

La disequazione $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + \sqrt{3+\sqrt{3}} < 0$**:**

A) non ha soluzioni

B) ha come insieme delle soluzioni l'insieme dei numeri reali positivi

C) ha come insieme delle soluzioni l'insieme dei numeri reali negativi

D) ha fra le soluzioni numeri irrazionali

E) è equivalente alla disequazione $3(\mathrm{sen}\,x)^2 + 3 + \sqrt{3} > 0$

9) Le soluzioni reali dell'equazione $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ sono tutti e soli gli x tali che:

[1] $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

[2] $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

[3] $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

[4] $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

[5] nessuna delle precedenti

79. La funzione inversa di $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ è espressa dall'equazione:

A) $x = \frac{3}{2-y}$

B) $x = \frac{y}{2y-3}$

C) $x = \frac{3-2y}{y}$

D) $x = \frac{-2y+3}{-y}$

E) $x = \frac{3}{y-2}$

80. Data la funzione $y = \operatorname{sen} x$ ristretta all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione inversa è:

A) $x = arcsen\ y$

B) $x = \frac{1}{sen\ y}$

C) $x = -arcsen\ y$

D) $x = -sen\ y$

E) $x = \sec y$

Qualche consiglio ulteriore…………….

LEZIONI in video

https://eliabombardelli.com/videolezioni-matematica/

TEST commentati

http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2015/09/TestIngressoIIVersione.pdf

https://www.polimi.it/fileadmin/user_upload/futuri-studenti/come-si-accede/ingegneria/Politest/Matematica/politest_MATEMATICA.pdf

Software online
GraphSketch


Grazie per la pazienza !