UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Scienze della Salute Umana

PRECORSO 2025

MATEMATICA

Giovanni Romano

Dipartimento di Scienze Biomediche, Sperimentali e Cliniche «Mario Serio»

- **Allegato A (2024)**

- Programmi relativi ai quesiti delle prove di ammissione ai corsi di laurea delle professioni sanitarie.

5. Matematica

- Insiemi numerici e algebra: numeri naturali, interi, razionali, reali. Ordinamento e confronto; ordine di grandezza e notazione scientifica. Operazioni e loro proprietà. Proporzioni e percentuali. Potenze con esponente intero, razionale) e loro proprietà. Radicali e loro proprietà. Logaritmi (in base 10 e in base e) e loro proprietà. Cenni di calcolo combinatorio. Espressioni algebriche, polinomi. Prodotti notevoli, potenza n-esima di un binomio, scomposizione in fattori dei polinomi. Frazioni algebriche. Equazioni e disequazioni algebriche di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni.
- Funzioni: nozioni fondamentali sulle funzioni e loro rappresentazioni grafiche (dominio, codominio, studio del segno, continuità, massimi e minimi, crescenza e decrescenza, ecc.). Funzioni elementari: algebriche intere e fratte, esponenziali, logaritmiche, goniometriche. Funzioni composte e funzioni inverse. Equazioni e disequazioni goniometriche.
- Geometria: poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misure di lunghezze, superfici e volumi. Isometrie, similitudini ed equivalenze nel piano. Luoghi geometrici. Misura degli angoli in gradi e radianti. Seno, coseno, tangente di un angolo e loro valori notevoli. Formule goniometriche. Risoluzione dei triangoli. Sistema di riferimento cartesiano nel piano. Distanza di due punti e punto medio di un segmento. Equazione della retta. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità. Distanza di un punto da una retta. Equazione della circonferenza, della parabola, dell'iperbole, dell'ellisse e loro rappresentazione nel piano cartesiano. Teorema di Pitagora. Teoremi di Euclide (primo e secondo).
- Probabilità e statistica: distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere e principali rappresentazioni grafiche. Nozione di esperimento casuale e di evento. Probabilità e frequenza.

tanto per cominciare

Le domande verranno così valutate:

- 1,5 punti per ogni risposta esatta;
- meno 0,4 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta omessa.

Ci sono 5 risposte possibili.

Quante risposte devo poter escludere, al minimo, affinché possa avere un qualche vantaggio nel «tirare a caso» ?

DOMANDA

a) prima risposta
b) seconda risposta
c) terza risposta
d) quarta risposta
e) quinta risposta

1) Se non ne conosco neanche una e tiro a caso

IN MEDIA: ogni 5 domande prendo +1.5 punti e 4 x (-0.4) = -1.6 punti

NON MI CONVIENE

DOMANDA

a) prima risposta
b) seconda risposta
c) terza risposta
d) quarta risposta
e) quinta risposta

2) Se ne posso escludere una sola → è come avere 4 risposte

IN MEDIA: ogni 4 domande prendo +1.5 punti e 3 x (-0.4) = -1.2 punti

Ho una leggera convenienza

ATTENZIONE: ci si aspetta questo esito come tendenza dopo un «grande» numero di domande nelle condizioni suddette. Il problema è probabilistico.

DOMANDA

a) prima risposta
b) seconda risposta
c) terza risposta
d) ~~quarta risposta~~
e) ~~quinta risposta~~

3) Se ne posso escludere DUE → è come avere 3 risposte

IN MEDIA: ogni 3 domande prendo +1.5 punti e 2 x (-0.4) = -0.8 punti

Ho una convenienza maggiore

ATTENZIONE (vedi nota di prima)

DOMANDA

a) prima risposta
b) seconda risposta
c) ~~terza risposta~~
d) ~~quarta risposta~~
e) ~~quinta risposta~~

4) Se ne posso escludere TRE → è come avere 2 risposte

IN MEDIA: ogni 2 domande prendo +1.5 -0.4 punti = 1.1 punti

Ho una convenienza ancora maggiore

ATTENZIONE (vedi nota di prima)

QUINDI

Quante risposte devo poter escludere, al minimo, affinché «tirare a caso» possa essere (in media) favorevole?

RISPOSTA: ALMENO UNA

La convenienza aumenta all'aumentare del numero di risposte che posso escludere

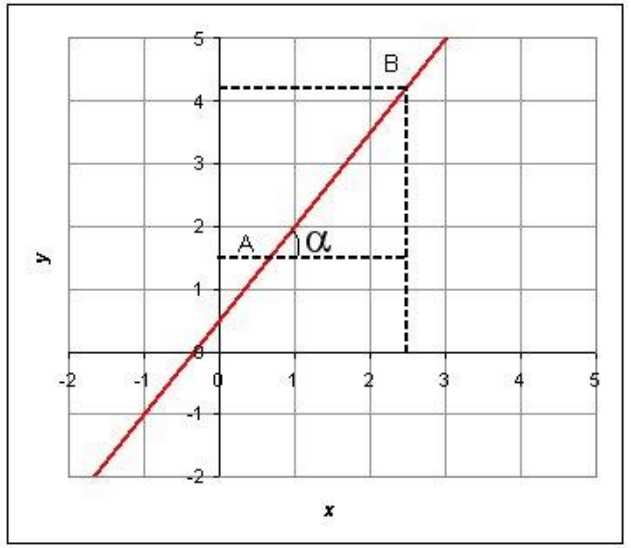
ovvero

«più ho studiato, meglio è»

- piano cartesiano
- funzioni

Il coefficiente angolare della retta y = −2x + 3 è:

A) 2
B) 3
C) -2
D) 1
E) −3



Partendo dai coefficienti dell'equazione generale di una retta: a x + b y + c = 0, se b ≠ 0 (retta non verticale), il coefficiente angolare è espresso dal rapporto m = - b / a.

Si puo' anche partire dalla forma analitica y = m x + q, dove m rappresenta il coefficiente angolare. Questa rappresentazione non contempla rette verticali, rappresentate invece dall'altra forma analitica per la quale sia b = 0.

Parole chiave:

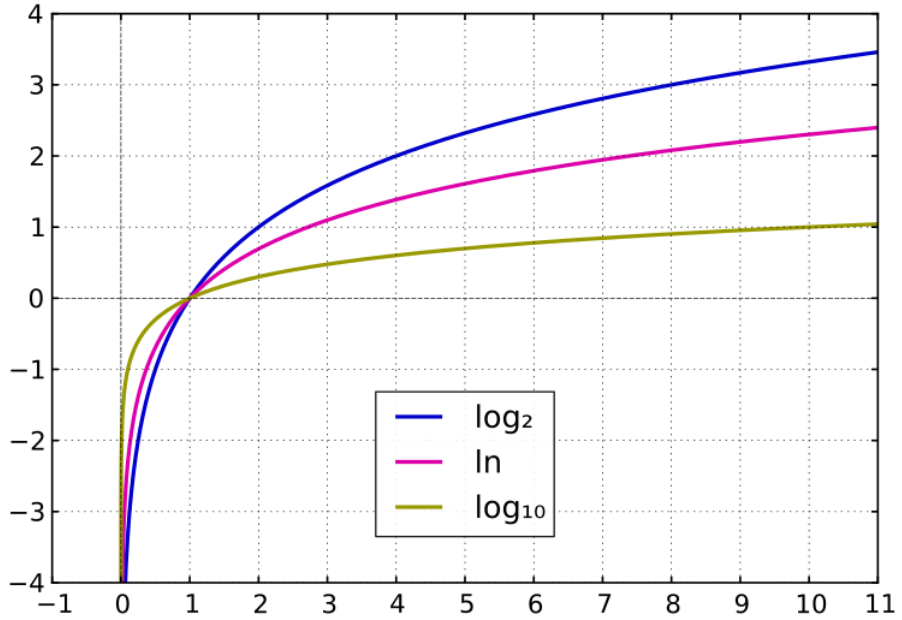
equazione di una retta
coefficiente angolare

SOLUZIONE

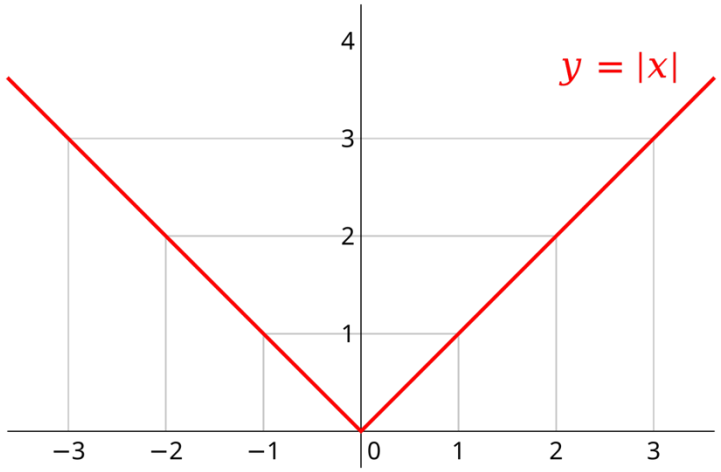
A) 2
B) 3
C) -2
D) 1
E) −3

La funzione f (x) = | ln x |

A) è pari
B) è definita per x < 0
C) è decrescente per x > 1
D) è limitata
E) è decrescente per 0 < x < 1



1) Il **logaritmo naturale** (o *logaritmo neperiano*) è il logaritmo in base »e», dove «e» è uguale a 2,71828182...
Il logaritmo naturale è definito per tutte le x reali e positive



2) Il **valore assoluto** (o modulo) di un numero reale è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è uguale all'opposto del numero se il numero è negativo.

In matematica, le funzioni **pari** e le funzioni **dispari** sono funzioni che soddisfano simmetrie assiali o radiali tra la funzione di un valore e la funzione dell'opposto del valore.

Definizione: funzione PARI

$$f(x) = f(-x), \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

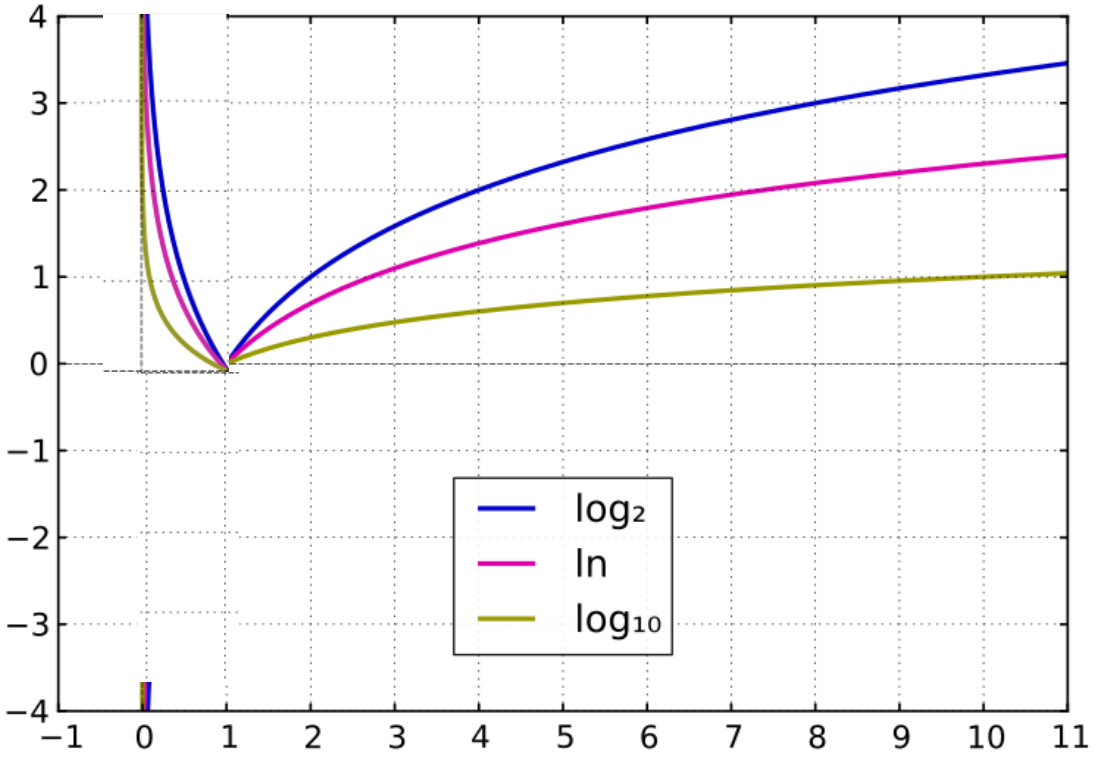
Geometricamente, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

Definizione: funzione DISPARI

$$f(x) = -f(-x), \qquad \text{per ogni } x \in D,$$

ossia $f(-x) = -f(x)$.

Dal punto di vista geometrico, il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi.



Parole chiave:

piano cartesiano
funzioni logaritmiche
funzioni crescenti, decrescenti
simmetrie

A) è pari
B) è definita per $x < 0$
C) è decrescente per $x > 1$
D) è limitata
E) è decrescente per $0 < x < 1$

SOLUZIONE

A) è pari
B) è definita per $x < 0$
C) è decrescente per $x > 1$
D) è limitata
E) è decrescente per $0 < x < 1$

Quale fra le seguenti è una circonferenza reale di centro (1, −1) ?

A) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

C) $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

D) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$

E) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

Equazione cartesiana della circonferenza [modifica | modifica wikitesto]

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, la circonferenza di centro (α, β) e raggio r è il luogo dei punti caratterizzati dall'equazione:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

→ se nell'equazione compaiono $1x^2$ e $1y^2$, questi termini derivano dalla presenza di $(x- \alpha)^2$ e $(y- \beta)^2$ ovvero mi devo aspettare anche i termini "-2α x" e "-2β y" …

Quale fra le seguenti è una circonferenza reale di centro (1, −1) ?

A) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$ NO, sarebbe di centro (+1, -1) **ma con raggio negativo !!!!**

B) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ NO: centro (-1, +1)

C) $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ NO: centro (+1/2, -1/2)

D) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$ centro (+1, -1)

E) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$ centro (-1, +1)

A) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3/2$
$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 3/2$

Parole chiave:

piano cartesiano
equazione di una circonferenza

A) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

C) $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

D) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$

E) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

La retta di equazione $y = x - 2$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono:

A) secanti
B) esterne
C) tangenti in (1, 0)
D) tangenti in (2, 0)
E) tangenti in (0, 1)

SOLUZIONE

A) secanti
B) esterne
C) tangenti in (1, 0)
D) tangenti in (2, 0)
E) tangenti in (0, 1)

sostituendo $y = x - 2$ nell'equazione della circonferenza ottengo:

$(x-2)^2 + x^2 = 1 \rightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 24 < 0$!!!!!

Sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

L’idea è che gli eventuali punti in comune tra retta e circonferenza sono tali per cui le loro coordinate sono le soluzioni del sistema a sinistra.

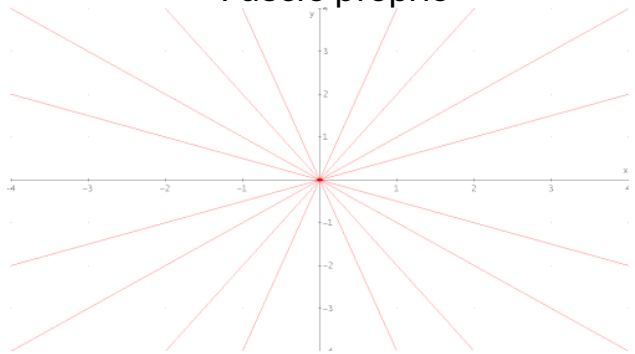
Parole chiave:

piano cartesiano
circonferenza, retta
sistemi di equazioni

Quali sono le coordinate dell' eventuale centro del fascio di rette di equazione: (1 + k)x + (y − 1)k + y + 1 = 0

A) il fascio è improprio, non ha centro
B) (1, −1)
C) (1, 1)
D) (−1, 1)
E) (−1, −1)

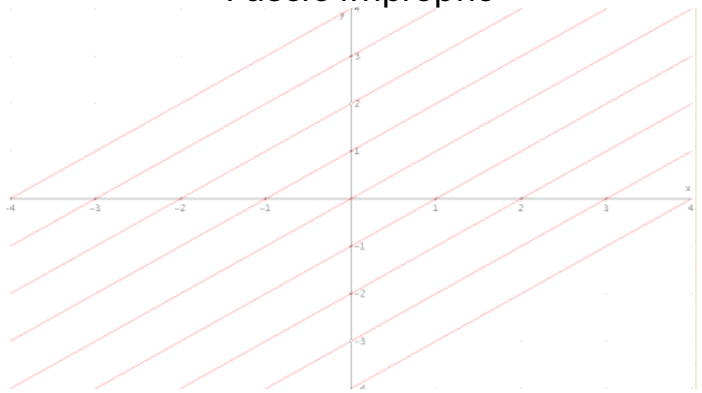
Fascio proprio



*Un fascio di rette si dice **proprio** se ogni sua retta passa per lo stesso punto, detto **centro** o **sostegno del fascio**. Questo punto è identificato dall'intersezione di due rette qualsiasi del fascio.*

$y = m(k)\,x + q(k)$

Fascio improprio



*Un fascio di rette si dice **improprio** se le sue rette sono tutte parallele tra loro.*

$(1 + k)x + (y - 1)k + y + 1 = 0$

→ $(1+k)\,x + (1+k)\,y + (1-k) = 0$

→ $y = -x + (1-k) / (1+k)$

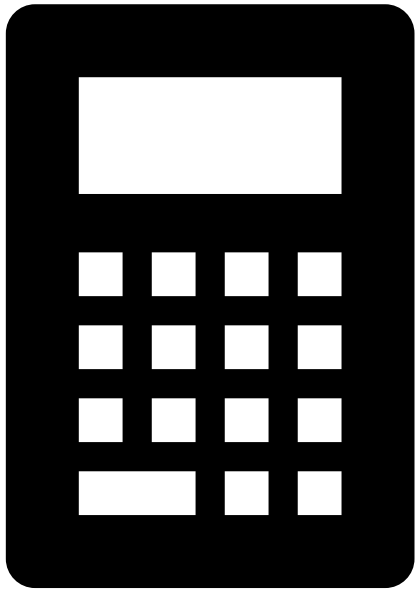
A) il fascio è improprio, non ha centro
B) (1, −1)
C) (1, 1)
D) (−1, 1)
E) (−1, −1)

Parole chiave:

piano cartesiano
rette
fasci di rette

SOLUZIONE

A) il fascio è improprio, non ha centro
B) (1, −1)
C) (1, 1)
D) (−1, 1)
E) (−1, −1)



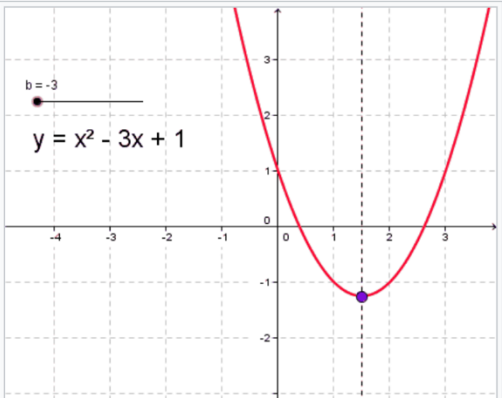
- equazioni
- disequazioni

Le soluzioni della disequazione $(x^2 + 4x)(x - 1) > 0$ sono:

A) $-4 < x < 0$ o $x > 1$
B) $0 < x < 1$ o $x > 4$
C) $x < -4$ o $0 < x < 1$
D) $x < 0$ o $1 < x < 4$
E) nessuna delle altre risposte è corretta

1) dobbiamo studiare il segno dei due fattori: $(x^2 + 4x)$ e $(x - 1)$

2) $x^2 + 4x$ è una parabola. L'equazione associate ha soluzioni x1=-4 ed x2=0 → teoria sulle parabole



$Y = a x^2 + b x + c$

a>0 → **Y positiva per x "esterna" all'intervallo (x1, x2)**

3) quindi $x^2 + 4x > 0$ per $x < -4$ e per $x > 0$

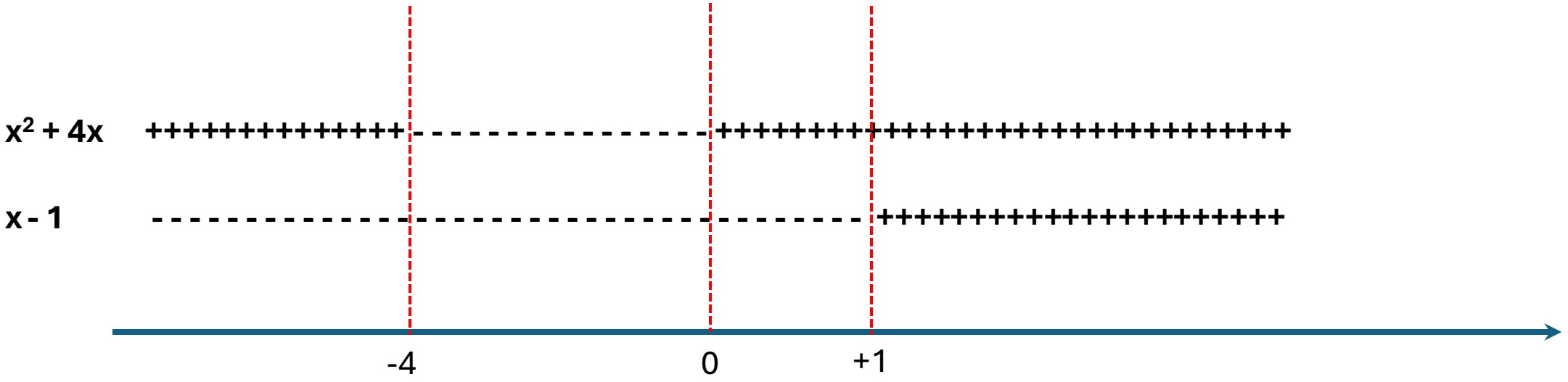
$x^2 + 4x > 0$ per $x < -4$ e per $x > 0$

$x - 1 > 0$ per $x > 1$

A) $-4 < x < 0$ o $x > 1$
B) $0 < x < 1$ o $x > 4$
C) $x < -4$ o $0 < x < 1$
D) $x < 0$ o $1 < x < 4$
E) nessuna delle altre risposte è corretta

SOLUZIONE

A) $-4 < x < 0$ o $x > 1$
B) $0 < x < 1$ o $x > 4$
C) $x < -4$ o $0 < x < 1$
D) $x < 0$ o $1 < x < 4$
E) nessuna delle altre risposte è corretta



Parole chiave:

disequazioni
polinomi
parabole, rette

Qual è la soluzione della disequazione: $\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right)x \cdot \sqrt{2}\left(x \cdot \sqrt{6}\right) > 0$ **?**

A) $x < \sqrt{3}$

B) $x > 3$

C) $x < 2$

D) $x > \sqrt{6}$

E) $x > \sqrt{2}$

Proprietà dei radicali

Per ogni coppia di numeri reali positive x e y:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right)x \cdot \sqrt{2}\left(x \cdot \sqrt{6}\right) > 0$$

→ $\sqrt{6}\, x \cdot \sqrt{2}\, \sqrt{6}\, x > 0$

→ $6\, \sqrt{2}\, x^2 > 0$ → **$x \neq 0$**

?

Parole chiave:

disequazioni
radicali

AD ESEMPIO se fosse stato:

$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})\, x \cdot \sqrt{2}\,(x + \sqrt{6}) > 0$ → $\sqrt{12}\, x \cdot (x + \sqrt{6}) > 0$ → $x^2 + \sqrt{6}\, x > 0$

le soluzioni dell'equazione di secondo grado associata sono:
$x = 0$ e $x = -\sqrt{6}$

Il termine »a» vale 1 (ax^2+bx+c) per cui la soluzione sarebbe stata:

$x < -\sqrt{6}$ e $x > 0$

Il polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ non è divisibile per:

A) $x - 1$
B) $x - 6$
C) $x + 2$
D) $x + 1$
E) $x - 3$

In algebra, si dice che un polinomio $A(x)$ è **divisibile** per un altro polinomio $B(x)$ se e solo se la divisione di $A(x)$ per $B(x)$ dà resto 0. Se $B(x)$ è di primo grado, il teorema di Ruffini fornisce un metodo efficiente per calcolare il resto della divisione. Se il resto è zero, allora il polinomio $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Un ovvio corollario del teorema del resto è il teorema di Ruffini[2]:

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$ se e solo se il resto della divisione è nullo, e quindi $P(a) = 0$.

Questo rende possibile determinare la divisibilità di un polinomio per un binomio $(x - a)$ senza dover eseguire la divisione.

Esempio: $p(x) = x^2-2x+1$ è divisibile per $x - 1 \iff p(+1) = 0$

$$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

A) $x - 1$ → provo $x = +1$ → 1-1-7+1+6

B) $x - 6$ → provo $x = +6$ → ...

C) $x + 2$ → provo $x = -2$ → 16 +8 -28 -2 + 6

D) $x + 1$ → provo $x = -1$ → 1 + 1 -7 -1 +6

E) $x - 3$ → provo $x = +3$ → 81 – 27 -63 +3 +6

SOLUZIONE

A) $x - 1$

B) $x - 6$

C) $x + 2$

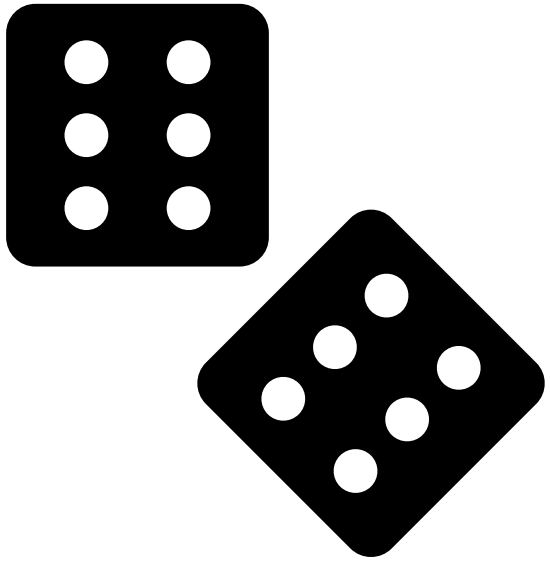
D) $x + 1$

E) $x - 3$

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x+2)(x+1)(x-3)\,P'(x)$$

Parole chiave:

polinomi
scomposizione in fattori
divisione per un binomio
teorema di Ruffini



- Probabilità

Definizione classica di Probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un evento è *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili*. (…)

Indicando con

1) Ω l'insieme di casi possibili
2) |Ω|=***n*** la sua cardinalità, (ovvero il **numero di casi possibili**)
3) *A* un evento
4) $\boldsymbol{n_A}$ il numero dei **casi favorevoli** ad *A*

(ad esempio, nel lancio di un dado Ω={1,2,3,4,5,6}, *n* = 6, *A* = "numero pari", n_A = 3), la probabilità di *A*, indicata con *P*(*A*), è pari a:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dalla definizione segue che:

- la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso tra 0 e 1

- la probabilità dell'evento certo è pari a 1:
se *A* = "numero compreso tra 1 e 6", $n_A = 6$ e $n_A/n = 1$

- la probabilità del verificarsi di uno di due eventi incompatibili, ovvero di due eventi che non possono verificarsi simultaneamente, è pari alla somma delle probabilità dei due eventi;

- la probabilità del verificarsi contemporaneamente di due eventi indipendenti, è pari al prodotto delle singole probabilità

Esempio:
se *A* = "numero pari", con *P*(*A*) =1/2, e *B*= "esce il 3", con *P*(*B*) = 1/6, la probabilità che tirando un dado si ottenga un numero pari oppure un 3 è:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Esempio:
se *A* = "numero pari", con *P*(*A*) = 1/2, la probabilità che tirando due dadi (dado 1 e dado 2) si ottengano due numeri pari è:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n_{A_1}}{n} \cdot \frac{n_{A_2}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Nel gioco della tombola alla prima estrazione qual è la probabilità che il numero estratto sia un multiplo di 5 o di 6?

A) 11/30
B) 1/3
C) 1/6
D) 5/9
E) 7/15

I numeri della tombola sono i numeri naturali da 1 a 90

I **casi favorevoli** sono “tutti i numeri multipli di 5” + “tutti i numeri multipli di 6”, purchè da 1 a 90.

essi sono:
5, 10, 15, 20, …, 85, 90. Per ogni decina ne ho 2 → in tutto sono 18
6, 12, 18, …, 84, 90 → in tutto sono…

ma va bene prendere tutti i multipli del 5 e del 6 per trovare i “casi favorevoli” ?

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90

6, 12, 18, 24, ~~30~~, 36, 42, 48, 54, ~~60~~, 66, 72, 78, 84, ~~90~~

→ **I casi favorevoli** sono 30. I casi possibili sono 90.

A) 11/30
B) 1/3
C) 1/6
D) 5/9
E) 7/15

SOLUZIONE

A) 11/30
B) 1/3
C) 1/6
D) 5/9
E) 7/15

Parole chiave:

probabilità semplice
somma di probabilità
multipli

Quali tra le seguenti funzioni hanno lo stesso grafico:
$f(x) = \ln x^2$; $g(x) = 2 \ln x$; $h(x) \ln^2 x$

A) solo f(x) e g(x)
B) solo f(x) e h(x)
C) solo g(x) e h(x)
D) tutte e tre hanno lo stesso grafico
E) nessuna ha il grafico uguale a quello di un'altra funzione proposta

Si tratta di capire se posso ricavare l'una dall'altra con passaggi matematici,
conservando lo stesso dominio.

A) è vero che $\ln (x^n) = n \ln (x)$ MA f(x) e g(x) hanno un diverso dominio.

Infatti: f(x) è definita per ogni $x \neq 0$, mentre g(x) solo per $x > 0$ → la D è FALSA

B) come già detto, $\ln (x^2) = 2 \ln (x)$ per cui la B è FALSA

C) per lo stesso motive, la C è FALSA

QUINDI...

SOLUZIONE

A) solo f(x) e g(x)
B) solo f(x) e h(x)
C) solo g(x) e h(x)
D) tutte e tre hanno lo stesso grafico
E) nessuna ha il grafico uguale a quello di un'altra funzione proposta