



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

**Scuola di  
Scienze della  
Salute Umana**

**PRECORSO  
2019**

# Problemi di Matematica

*Giovanni Romano*

Dipartimento di  
Scienze Biomediche, Sperimentali e Cliniche «Mario Serio»

PRECORSO 2019 - A.A. 2019/20

# **Numeri, frazioni, operazioni fondamentali**

## Problema elementare

La base di partenza per il calcolo dell'IMU di un immobile di classe A1 si ottiene rivalutando la rendita catastale del 5% e moltiplicando il risultato ottenuto per 160.

Allo stesso risultato si può giungere in un solo passaggio, moltiplicando direttamente la rendita catastale per un opportuno coefficiente  $c$ . Determinare il valore di  $c$ .

### Analisi del testo

parte essenziale: "... rivalutando (ovvero aumentando, ovvero sommando) la rendita catastale del 5% e moltiplicando ... per 160 ..."

Se  $R$  è la rendita catastale e  $B$  è la base di partenza per calcolo IMU:

$$B = \left( R + R \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160$$

## di nuovo Analisi del testo

“ ... Allo stesso risultato ...” vuol dire B

...si può giungere ... moltiplicando direttamente la rendita catastale (R) per un opportuno coefficiente c ...”

Ovvero  $B = c \cdot R$

Quindi ...

$$\begin{cases} B = \left( R + R \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160 \\ B = c \cdot R \end{cases} \Rightarrow c \cdot \cancel{R} = \left( \cancel{R} + \cancel{R} \cdot \frac{5}{100} \right) \cdot 160$$

$$\text{da cui } c = \left( 1 + \frac{5}{100} \right) \cdot 160 = 168$$

**Da notare come 168 sia «160 aumentato del 5%»...**

57. La media aritmetica di cinque numeri è 14. Se la media aritmetica dei primi due è 20, allora la media aritmetica degli altri tre è:

- A) 12
- B) 14
- C) 8
- D) 9
- E) 10

La formula della media aritmetica semplice per  $n$  elementi è:

$$M_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### Esempio

Dati cinque numeri:

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 13 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 7 \quad x_5 = 12$$

la loro media aritmetica è data da:

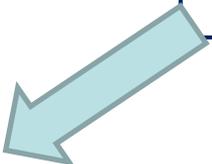
$$M_a = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{51}{5} = 10,2$$

$$14 = (a + b + c + d + e) / 5$$

$$a + b + c + d + e = 70$$

$$c + d + e = 30$$

$$(c + d + e) / 3 = 10$$

$$(a + b) / 2 = 20$$
$$\rightarrow a + b = 40$$


**57. La media aritmetica di cinque numeri è 14. Se la media aritmetica dei primi due è 20, allora la media aritmetica degli altri tre è:**

A) 12

B) 14

C) 8

D) 9

E) 10



**Se sul prezzo di un oggetto si pratica lo sconto del 30%, e quindi sul prezzo così ottenuto si applica un nuovo sconto del 20%, quanto vale in percentuale lo sconto (cioè la riduzione percentuale) totale sul prezzo iniziale:**

Attenzione: il 20% è applicato sul valore già scontato del 30% !!!

Parto da 100 → 70 → 56, quindi in tutto l' ho scontato del....

A) quesito senza soluzione univoca e corretta

B) 44% 

C) 50%

D) 36%

E) 66%

$$\text{lo pago } X \cdot 70/100 \cdot 80/100 = 56/100 \cdot X$$

$$\Rightarrow \text{Sconto totale} = 44 / 100 \cdot X$$

RICORDA INFATTI che:

«%»  $\Leftrightarrow$  «diviso 100»

Esempio:  $7\% = 7/100 \rightarrow 7\% X = \text{«sette per cento di X»} = 7X/100$

Per cui ad es. il 7% di 120 =  $7 \cdot 120/100 = 840/100 = 8.40$

**NOTA: «per mille»**

«‰»  $\Leftrightarrow$  «diviso 1000»

**Esempio:**

$8‰ = 0.8\%$ ;  $8\% = 80‰$

**Domanda:**

è maggiore il 2% di x oppure il 22‰ di x ?

## Elevamento a potenza di un numero

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

... ma allora ...

$$a^n = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots}^{m \text{ volte}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{k \text{ volte}}}_{n \text{ volte}} \quad \dots \text{ovviamente con } n=m+k$$

quindi  $a^n = a^m \cdot a^k$  e poiché abbiamo convenuto che  $n=m+k$ , allora

$$a^{m+k} = a^m \cdot a^k$$

Proprietà fondamentale delle potenze

## Elevamento a potenza di un numero

Analogamente osserviamo che

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots}^{m \text{ volte}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{k \text{ volte}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{m \text{ volte}}} = a^k$$

ma  $k=n-m$ , per cui

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Proprietà fondamentale delle potenze

## Elevamento a potenza di un numero

... domanda da test: **“La metà di  $10^6$  è:”**

$$10^6 = 10^{(1+5)} = 10 \cdot 10^5$$

quindi ...

$$\frac{10^6}{2} = \frac{10 \cdot 10^5}{2} = 5 \cdot 10^5$$

## Elevamento a potenza di un numero

Interpretare un numero come una potenza può rappresentare un modo molto rapido per comprenderne la natura:

**Determinare quale dei seguenti numeri non è un quadrato perfetto:**

A) 800

B) 256

C)  $12 \cdot 27$

D) 10000

E)  $11 \cdot 44$

$800 = 2^3 \cdot 10^2$  ... NON è un quadrato perfetto

$11 \cdot 44 = 11 \cdot 11 \cdot 2^2 = 11^2 \cdot 2^2$  ... quadrato perfetto

$10000 = 10^4$  ... quadrato perfetto

$12 \cdot 27 = 3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 2^2$  ... quadrato perfetto

$256 = 2^8$  ... quadrato perfetto

**Sia  $a = 1001^2 - 999^2$  . Determinare quale delle seguenti relazioni è verificata.**

A)  $3000 < a < 5000$  

B)  $a < 1000$

C)  $1000 < a < 3000$

D)  $5000 < a < 7000$

E)  $a > 7000$

$a = 1001^2 - 999^2$  ... ovvero:  $a = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

da cui si desume immediatamente che, essendo:

$x = 1001$

$y = 999$

... allora

$(x+y) = 2000$

$(x-y) = 2$

... perciò:  $a = 2000 \cdot 2 = 4000$

**Qual è il più grande fra i seguenti numeri:**

1)  $2^{62}$

2) 232

3)  $2^{(2^6)}$  

4)  $(2^2)^6$

5) 1024

Escludo subito il numero 232, essendo più piccolo di 1024.  
Osservo, inoltre, che i numeri rimanenti sono tutti potenze di 2:

$$2^{(2^6)} = 2^{64}$$

$$(2^2)^6 = 2^{12}$$

$$1024 = 2^{10}$$

...e l'esponente più alto ... vince ...

**Data l'equazione  $5 \log x = \log 32$ , posso affermare che  $x$  è uguale a:**

Si dice *logaritmo* in base  $a$  di un numero  $x$  l'esponente da dare ad  $a$  per ottenere  $x$  ( $x$  viene chiamato *argomento* del logaritmo).

In altre parole, se  $x = a^y$

segue che:  $y = \log_a x$

Per esempio,  $\log_3 81 = 4$  perché  $3^4 = 81$ .

E' tutt'altro che difficile dimostrare la relazione:

$$\log_a (x^k) = k \log_a x$$

dove  $a$  ed  $x$  sono numeri reali positivi, con  $a$  diverso da 1.

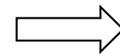
Data l'equazione  $5 \log x = \log 32$ , posso affermare che  $x$  è uguale a:

- 1)  $1/2$
- 2)  $2$  
- 3)  $5$
- 4)  $4/2^{(-1/2)}$
- 5) Nessuna delle altre quattro risposte

Proprietà dei logaritmi

$$k \log x = \log (x^k)$$

$$\log x^5 = \log 32$$



$$x^5 = 32$$

quindi  $x=2$

Se  $a = \ln 4$ ,  $b = \ln (1/16)$ ,  $c = \ln 8$  qual è il valore dell'espressione  $(a-c)/b$  ?

A)  $-1/2$

B)  $1/4$  

C)  $1$

D)  $-1/4$

E)  $1/2$

Si tratta di ricordarsi le proprietà dei logaritmi ed eseguire i calcoli.

$$\ln 4 = \ln (2^2) = 2 \ln 2$$

$$\ln(1/16) = -\ln 16 = -\ln (2^4) = -4 \ln 2$$

$$\ln(8) = \ln (2^3) = 3 \ln 2$$

$$\rightarrow (a-c)/b = (2 \ln 2 - 3 \ln 2) / (-4 \ln 2) = -\ln 2 / (-4 \ln 2) = 1/4$$

A Michele viene chiesto di inserire i due numeri mancanti nella sequenza:

2 – 3 - 7 - 13 - 27 - ..... - .....

Quali numeri deve inserire Michele ?

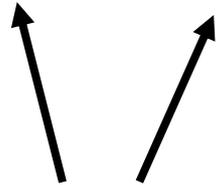
- A) 55 - 107
- B) 53 – 107
- C) 53 – 105
- D) 54 – 106
- E) 55 - 105

**1) provare con l'idea di una successione aritmetica oppure geometrica**  
(la differenza fra due valori successivi è costante ? ed il loro rapporto ?)

**2) calcolare le differenze fra coppie di numeri successivi e cercare di capirne la logica:  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 14 \rightarrow ???$**

**3) provare con «varianti» di una successione aritmetica o geometrica:**  
esempio: eseguo ALTERNATIVAMENTE certe operazioni: es. sommo x poi sommo y, poi x, e così' via, etc. **oppure** raddoppio, poi tolgo 1, poi raddoppio, poi tolgo 1, etc.

$$\textcircled{2 - 3} - \textcircled{7 - 13} - 27 - \dots - \dots$$



in entrambi i casi, il secondo numero della coppia è QUASI il doppio dell'altro...

$$3 = 2 \times 2 - 1; 13 = 7 \times 2 - 1;$$

questo NON è vero nel passare da 3 a 7, però in tal caso  $7 = 3 \times 2 + 1$ ...

$$2 - \textcircled{3 - 7} - 13 - 27 - \dots - \dots$$

**2 - 3 - 7 - 13 - 27 - ..... - .....**

Quindi avrei:

$$2 \rightarrow 2 \times 2 - 1 = 3 \rightarrow 3 \times 2 + 1 = 7 \rightarrow 7 \times 2 - 1 = 13 \rightarrow 13 \times 2 + 1 = 27 \rightarrow 27 \times 2 - 1 = 53 \rightarrow 53 \times 2 + 1 = 107$$

**A Michele viene chiesto di inserire i due numeri mancanti nella sequenza:**

**2 - 3 - 7 - 13 - 27 - ..... - .....**

**Quali numeri deve inserire Michele ?**

**A) 55 - 107**

**B) 53 - 107** 

**C) 53 - 105**

**D) 54 - 106**

**E) 55 - 105**

## Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,...

una **progressione aritmetica** è una **successione** di **numeri** tali che la **differenza** tra ciascun termine e il suo precedente sia una **costante**.  
Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 3, 5, 7, 9, 11, ... è una progressione aritmetica di ragione 2.

una **progressione geometrica** è una **successione** di **numeri** tali che il **rapporto** tra ciascun termine e il suo precedente sia una **costante**.  
Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... è una progressione geometrica di ragione 2.

**125, 64, 27, 8:**

capisco subito che non si tratta di una progressione aritmetica ...

$125 - 64 = 61$  (*ipotesi di ragione*)

... subito confutata:  $64 - 27 = 37$  !!!

...né di una progressione geometrica...

$125 / 64 = 1.953$  (*ipotesi di ragione*)

... subito confutata:  $64 / 27 = 2.370$  !!!

ne deduco che deve essere qualcosa di semplicissimo: una potenza (?)

vedo che  $8 = 2^3$  ...  $27 = 3^3$  ... non è che per caso  $64 = 4^3$  e  $125 = 5^3$  ???

Mi trovo allora con  $5^3, 4^3, 3^3, 2^3$  ... cosa manca?  $1^3$ , ovvero **1**

**125, 64, 27, 8, 1**

**I cateti di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente**

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

**Quanto misura l'ipotenusa ? (quiz 2013)**

**A)**  $2\sqrt{6}$

**B)** 16

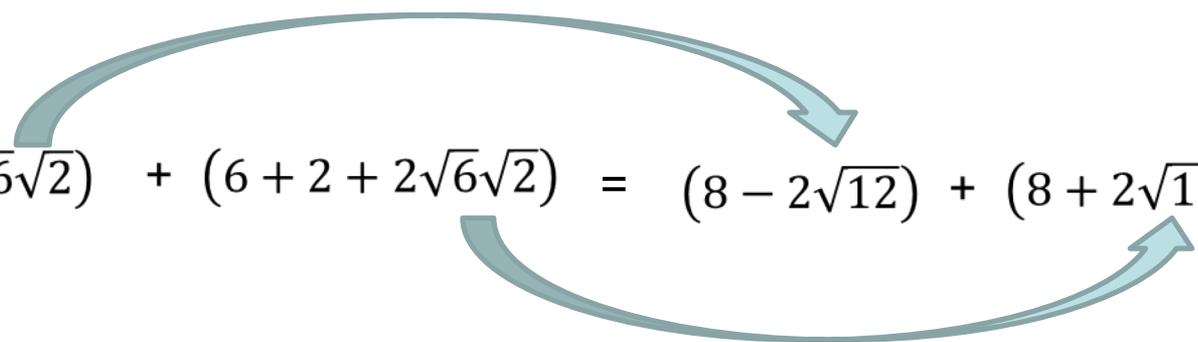
**C)**  $2\sqrt{2}$

**D)** 4

**E)**  $\sqrt{16 + 2\sqrt{12}}$

Si tratta di applicare il teorema di Pitagora e di lavorare con i radicali

$$(\text{Ipotenusa})^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 =$$

$$= (6 + 2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2}) + (6 + 2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2}) = (8 - 2\sqrt{12}) + (8 + 2\sqrt{12}) =$$


$$= \mathbf{16}$$

ATTENZIONE: questo è il QUADRATO dell'ipotenusa!!!!

**I cateti di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente**

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

**Quanto misura l'ipotenusa ? (quiz 2013)**

**A)  $2\sqrt{6}$**

**B) 16**

**C)  $2\sqrt{2}$**

**D) 4**



**E)  $\sqrt{16 + 2\sqrt{12}}$**

**(alcune) delle proprietà fondamentali delle radici  
(a numero reale positivo) – wikipedia**

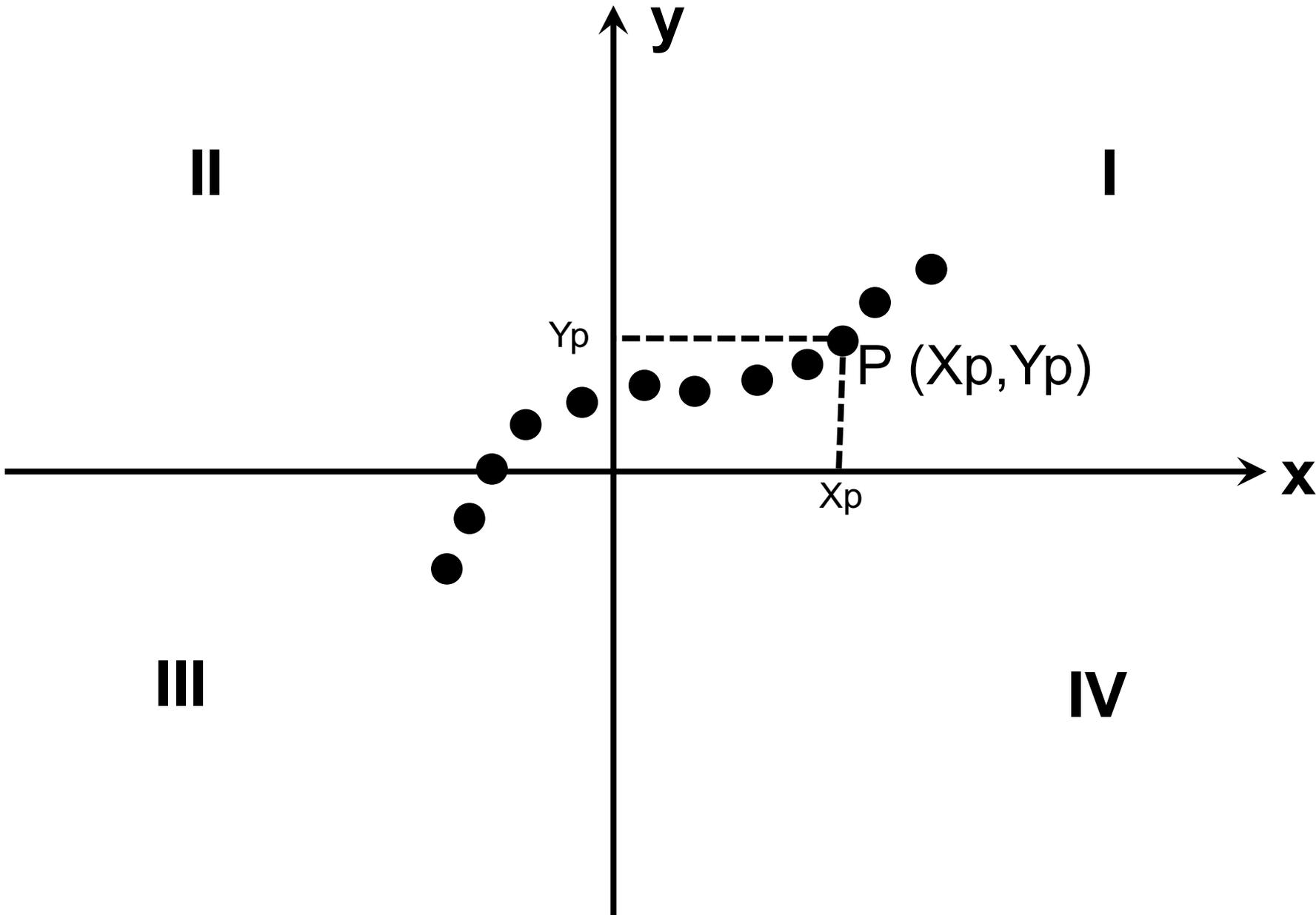
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Funzioni  
Piano cartesiano  
Geometria



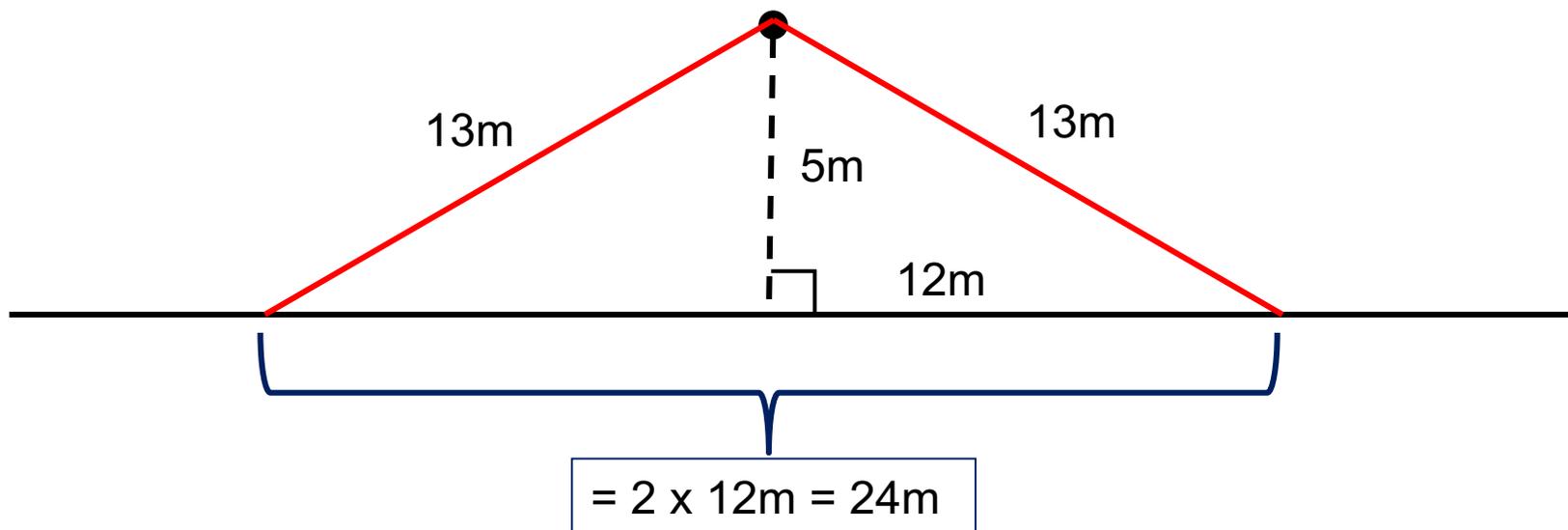
Un cane è legato, mediante una catena lunga 13 m, a un palo che dista 5 m da un sentiero rettilineo.

Determinare la lunghezza del tratto di sentiero accessibile al cane.

- a) 18 m
- b) 20 m
- c) 24 m
- d) 26 m
- e) 16 m

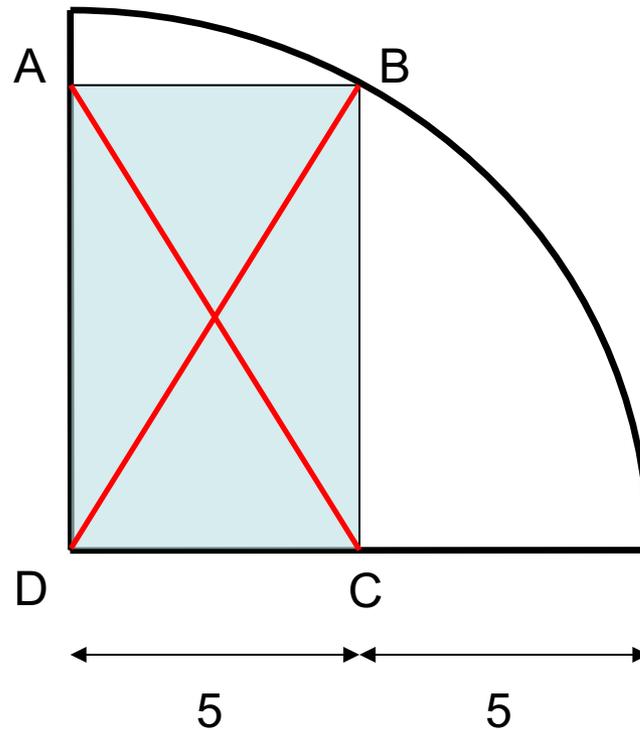


$$\sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12$$



**Il rettangolo ABCD è inscritto in un quarto circonferenza. Quanto vale il segmento AC?**

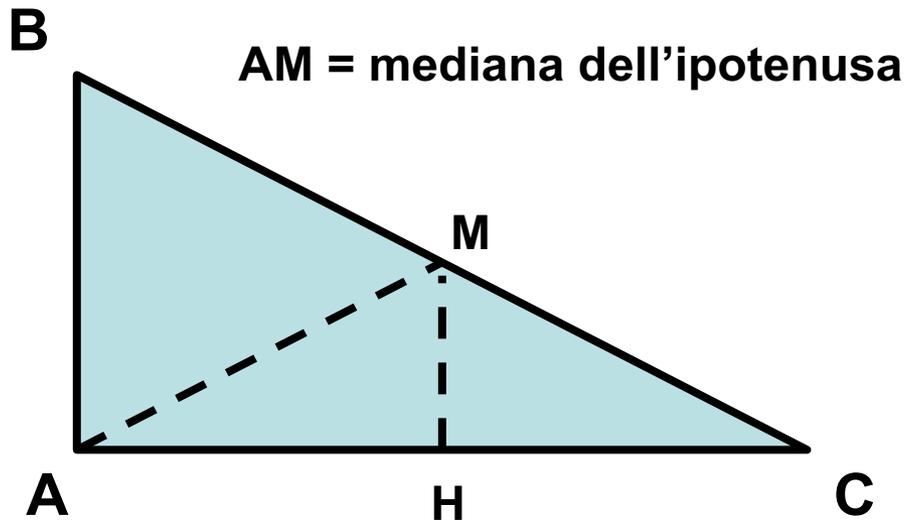
- a) 5
- b) 5 moltiplicato radice di due
- c) 5 diviso radice di 2
- d) 10 ←
- e) 7.5



Le diagonali di un rettangolo sono uguali.

Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 10m e 24m.  
Qual è la mediana relativa all'ipotenusa ?

- A) 12
- B) 15
- C) 26
- D) 13
- E) 16

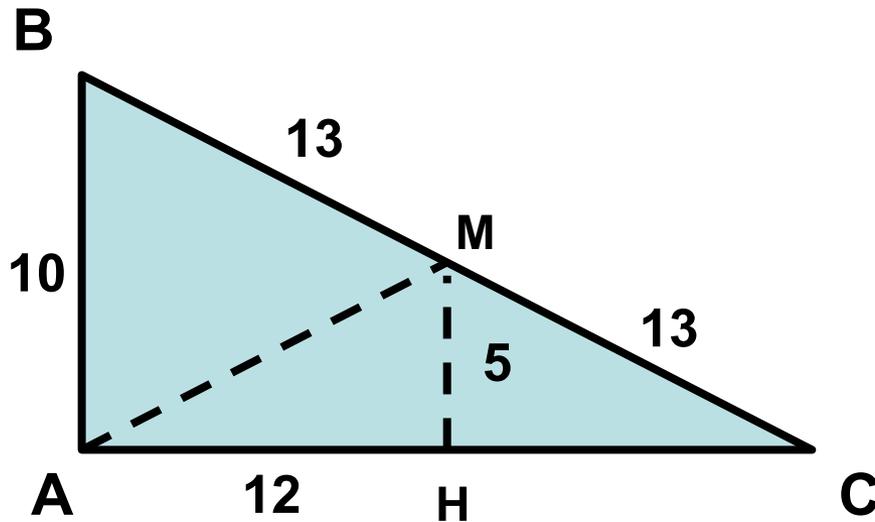


**calcoleremo AM usando il teorema di Pitagora per il triangolo AMH, sapendo che:**

**AH = 12m (ABC e MHC sono simili)**

**MH calcolato da Pitagora sul triangolo MHC**

**AM = mediana dell'ipotenusa**



- 1. calcolo l'ipotenusa con il teorema di Pitagora:  $BC = 26 \rightarrow MC=13$**
- 2. calcolo  $MH$  sapendo che  $ABC$  e  $MHC$  sono simili:  $MH = \frac{1}{2} AB$**
- 3. calcolo  $MA = 13$**

**Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 10m e 24m.  
Qual è la mediana relativa all'ipotenusa ?**

**A) 12**

**B) 15**

**C) 26**

**D) 13**



**E) 16**

**Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?**

a)  $2^{3/2}$

b) 4

c) 2

d)  $4^{1/3}$

e)  $4^{2/3}$



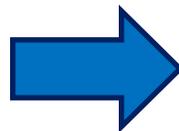
$$V = L^3$$

$$V_1 / V_2 = L_1^3 / L_2^3$$

$$S_1 / S_2 = L_1^2 / L_2^2$$

$$S_1 / S_2 = (L_1 / L_2)^2$$

$$V_1 / V_2 = (L_1 / L_2)^3$$



$$\frac{S_1 / S_2}{V_1 / V_2} = (L_1 / L_2)^{2/3}$$

Quali sono i numeri reali che soddisfano l'equazione  
 $X^4 + X^2 - 2 = 0$  ?

- A) 2
- B) 0
- C) 4
- D) 1
- E) infiniti

si propone un'equazione di quarto grado....

...ma NON è necessario risolverla !!!

Ci si deve solo ricordare che se  $x_0$  è soluzione dell'equazione  $f(x) = 0$  vuol dire che  $f(x_0) = 0$

$$X^4 + X^2 - 2 = 0$$

Basterà verificare quale dei seguenti numeri:  
2, 0, 4, 1 verifica l'equazione proposta:

$$x_0 = 2: 16 + 4 - 2 = 0 \text{ FALSO}$$

$$x_0 = 0: 0 + 0 - 2 = 0 \text{ FALSO}$$

$$x_0 = 4: 256 + 16 - 2 = 0 \text{ FALSO}$$

$$x_0 = 1: 1 + 1 - 2 = 0 \text{ VERO}$$

**Quali sono i numeri reali che soddisfano l'equazione  
 $X^4 + X^2 - 2 = 0$  ?**

**A) 2**

**B) 0**

**C) 4**

**D) 1** 

**E) infiniti**

**Determinare l'area del triangolo che ha come vertici i punti (0,0),(0,1),(13,12) del piano cartesiano**

a) 13

b) 6

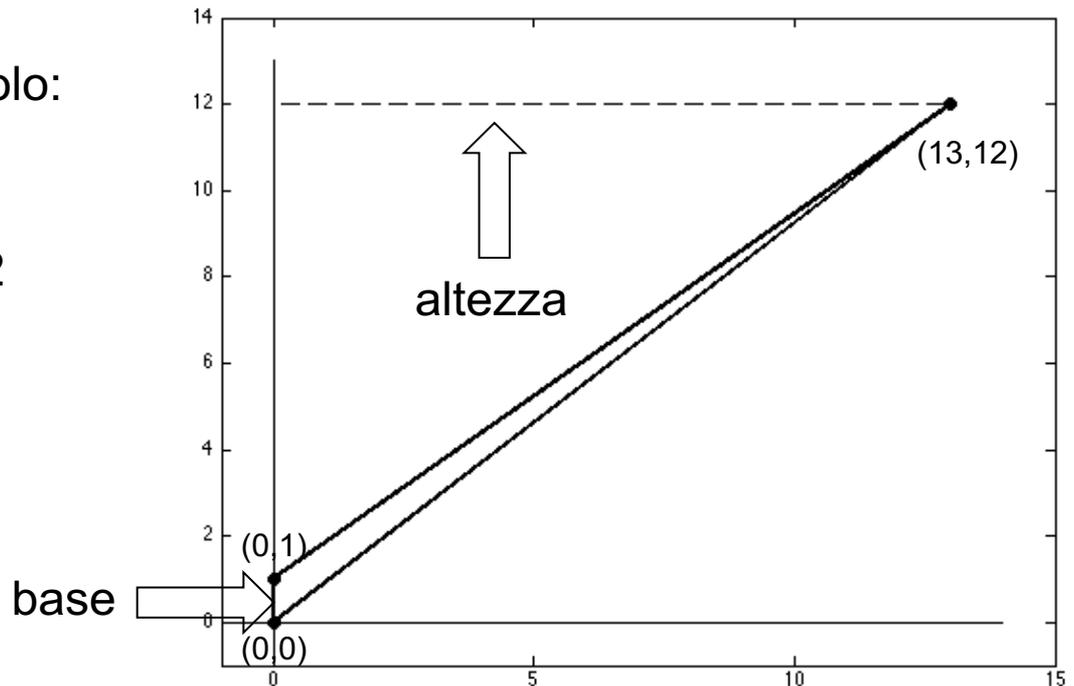
c) 78

d)  $13/2$  ←

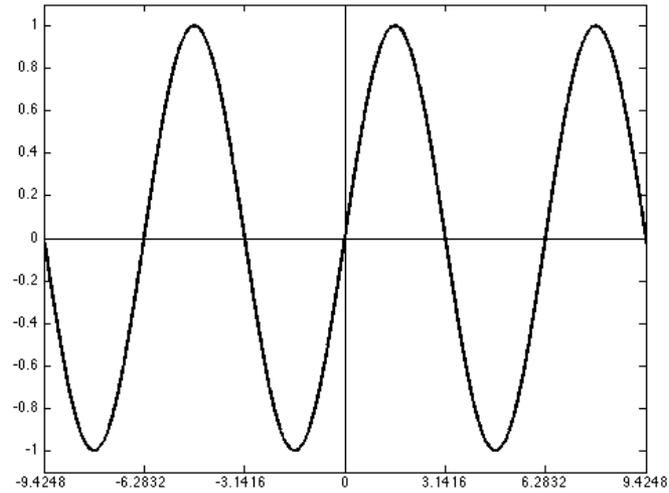
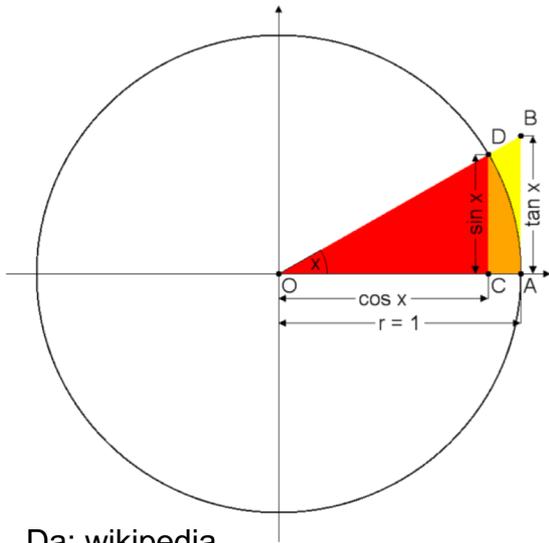
e) 12

E' sufficiente disegnare il triangolo:

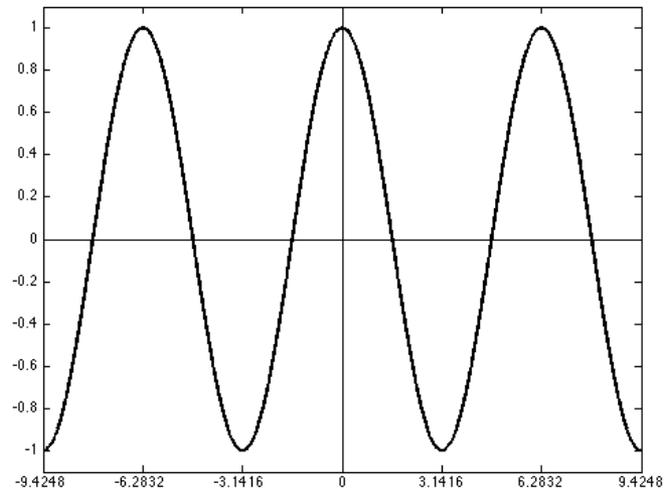
base = 1  
altezza = 13 } Area =  $13/2$



# Definizione del seno e del coseno di un angolo



$\sin(x)$   
*dispari:  $\sin(-x) = -\sin(x)$*



$\cos(x)$   
*pari:  $\cos(-x) = \cos(x)$*

**Determinare quale delle seguenti funzioni soddisfa la relazione  $f(-x) = -f(x)$  per ogni numero reale  $x$**

a)  $\cos^3(x)$

b)  $\sin^3(x)$

c)  $\cos(x^3)$

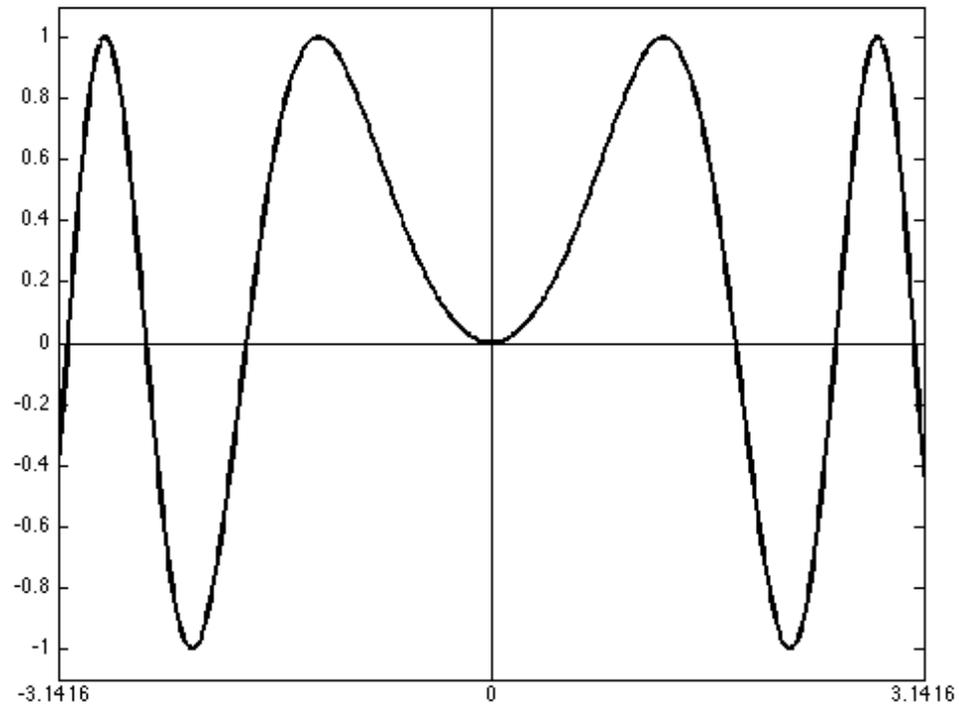
d)  $\sin^2(x)$

e)  $\sin(x^2)$

Vediamole ...

$$y = \sin(x^2)$$

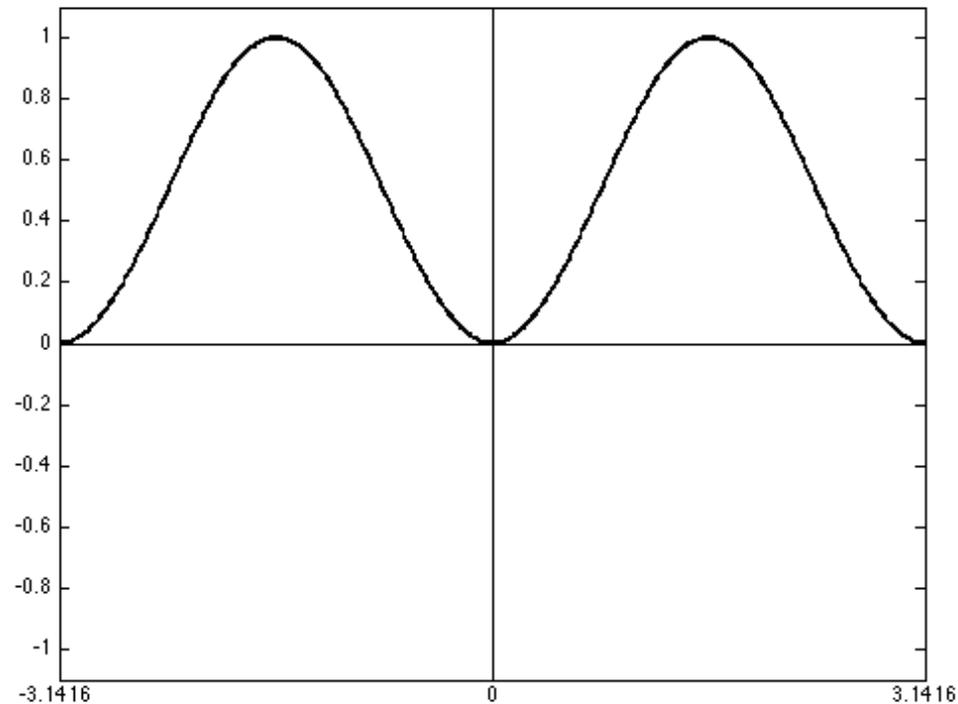
Se l'argomento è un quadrato, il valore di  $y$  non risentirà di  $x$  negativi:



... non è lei ...

$$y = \sin^2(x)$$

Se elevo al quadrato la funzione il suo valore sarà sempre positivo, annullando l'eventuale disparità per valori negativi della  $x$ :

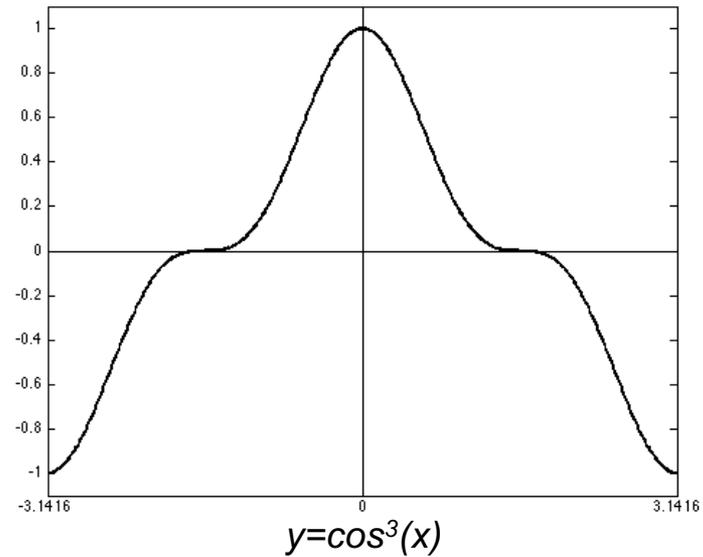
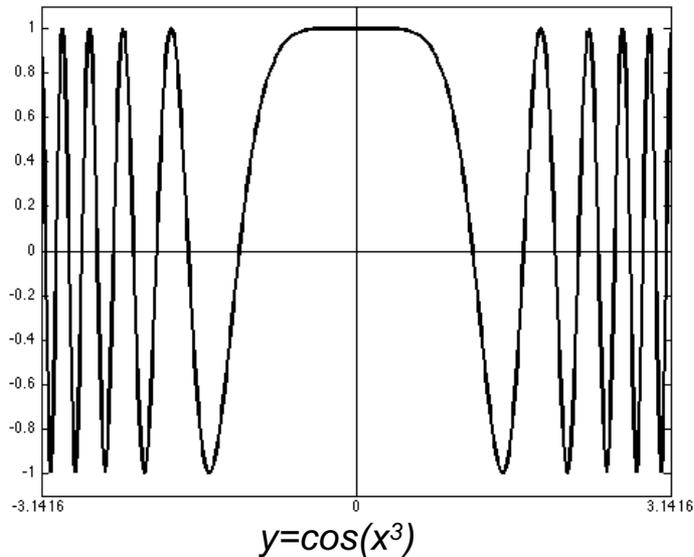


... non è lei ...

$$y=\cos(x^3) \quad y=\cos^3(x)$$

Una funzione pari, come il coseno, rimane pari in qualsiasi caso:

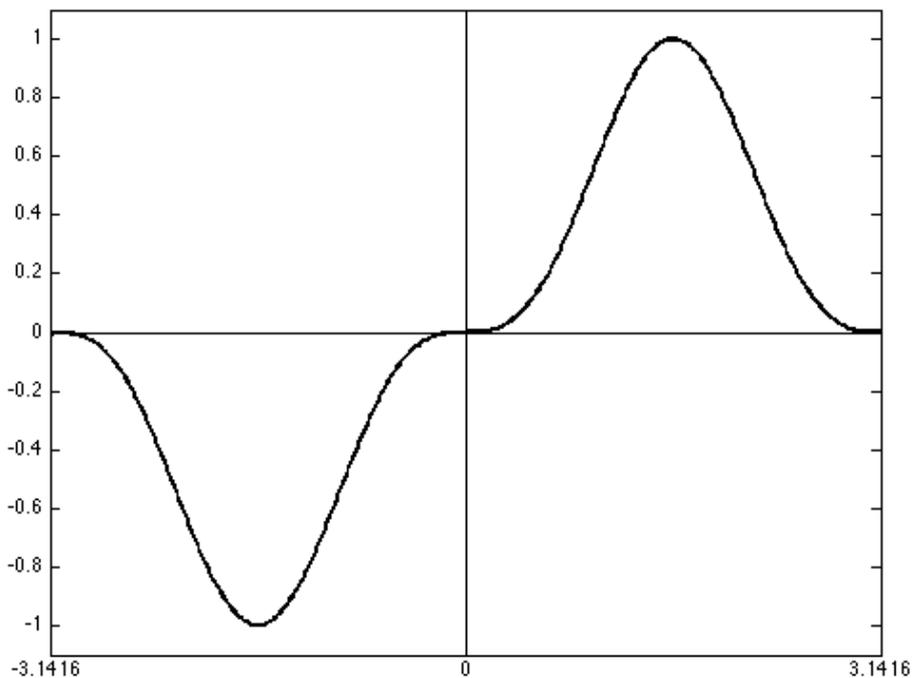
- a)  $x^3$  è solo un numero: che sia positivo o negativo, il coseno di un qualsiasi numero è comunque pari.
- b)  $\cos^3 = \cos^2 \cdot \cos$  : si tratta di una funzione senz'altro pari ( $\cos^2$ ) moltiplicata per una funzione ancora pari ( $\cos$ ). Quindi  $\cos^3$  è pari.



... non sono nemmeno loro ...

$$y = \sin^3(x)$$

$\sin^3 = \sin^2 \cdot \sin$  : si tratta di una funzione senz'altro pari ( $\sin^2$ ) moltiplicata per una funzione dispari ( $\sin$ ). Quindi  $\sin^3$  è dispari.



$$\sin^3(-x) = -\sin^3(x)$$

**Determinare quale delle seguenti funzioni soddisfa la relazione  $f(-x) = -f(x)$  per ogni numero reale  $x$**

a)  $\cos^3(x)$

b)  $\sin^3(x)$



c)  $\cos(x^3)$

d)  $\sin^2(x)$

e)  $\sin(x^2)$

**Semplificare la seguente espressione:  
(test 2013)**

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-2}{x}$$

**A)**  $\frac{x-2}{x+2}$

**B)**  $\frac{2x^2-2}{x(x+2)}$

**C)**  $\frac{4}{x(x+2)}$

**D)**  $\frac{-4}{x(x+2)}$

**E)**  $\frac{4}{x+2}$

Si tratta di saper sommare le due frazioni...

Minimo comun denominatore =  $x \cdot (x+2)$

**Avrò quindi:**

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+2} - \frac{x-2}{x} &= \frac{xx}{(x+2)x} - \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{(x+2)x} = \frac{4}{x(x+2)} \end{aligned}$$

**Semplificare la seguente espressione:  
(quiz 2013)**

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-2}{x}$$

**A)**  $\frac{x-2}{x+2}$

**B)**  $\frac{2x^2-2}{x(x+2)}$

**C)**  $\frac{4}{x(x+2)}$

**D)**  $\frac{-4}{x(x+2)}$

**E)**  $\frac{4}{x+2}$



# Probabilità

## Definizione classica di Probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un evento è *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili.* (...)

Indicando con

- 1)  $\Omega$  l'insieme di casi possibili
- 2)  $|\Omega|=n$  la sua cardinalità, (ovvero il **numero di casi possibili**)
- 3)  $A$  un evento
- 4)  $n_A$  il numero dei **casi favorevoli** ad  $A$

(ad esempio, nel lancio di un dado  $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ,  $n = 6$ ,  $A =$  "numero pari",  $n_A = 3$ ), la probabilità di  $A$ , indicata con  $P(A)$ , è pari a:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dalla definizione segue che:

- la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso tra 0 e 1
- la probabilità dell'evento certo è pari a 1:  
se  $A = \text{"numero compreso tra 1 e 6"}$ ,  $n_A = 6$  e  $n_A/n = 1$
- la probabilità del verificarsi di uno di due eventi incompatibili, ovvero di due eventi che non possono verificarsi simultaneamente, è pari alla somma delle probabilità dei due eventi;
- la probabilità del verificarsi contemporaneamente di due eventi indipendenti, è pari al prodotto delle singole probabilità

Esempio:

se  $A = \text{"numero pari"}$ , con  $P(A) = 1/2$ , e  $B = \text{"esce il 3"}$ , con  $P(B) = 1/6$ , la probabilità che tirando un dado si ottenga un numero pari oppure un 3 è:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Esempio:

se  $A = \text{"numero pari"}$ , con  $P(A) = 1/2$ , la probabilità che tirando due dadi (dado 1 e dado 2) si ottengano due numeri pari è:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n_{A_1}}{n} \cdot \frac{n_{A_2}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**Nel gioco dei dadi, lanciando contemporaneamente due dadi, qual è la probabilità che si abbiano due facce con somma 7 ?**

- 1) 1/3**
- 2) 1/7**
- 3) 1/6**
- 4) 2/7**
- 5) 5/36**

Evidentemente, in questo caso, A="due facce con somma 7" è soddisfatto dai seguenti eventi:

$$\left\{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 6 \end{matrix} \right\}; \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right\}; \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}; \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}; \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}; \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

ovvero,  $n_A=6$ . Naturalmente, i possibili eventi totali sono 36 (per ogni numero su un dado, può uscire uno qualsiasi dei 6 numeri sull'altro dado).

Quindi

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

La probabilità con cui un paziente deve attendere meno di dieci minuti il proprio turno in un ambulatorio medico è 0,8. Qual è la probabilità che una paziente che si reca due volte presso l'ambulatorio medico attenda, almeno una delle due volte, meno di dieci minuti prima di essere ricevuta dal medico?



$$P=0,8$$

Se il paziente si reca 10 volte presso lo studio medico 8 volte attenderà meno di 10 minuti

"a" = attendo meno di dieci minuti  $P=0,8$

"b" = attendo più di dieci minuti  $P=0,2$

Recandosi nell'ambulatorio due volte si possono verificare le seguenti situazioni:

**a-a;**

**a-b;**

**Eventi indipendenti = x**

**b-a;**

~~**b-b.**~~

$$P1 = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64$$

$$P2 = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$$

$$P3 = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16;$$

$$P4 = \del{0,2 \cdot 0,2} = \del{0,04}$$

La probabilità che **almeno una delle due volte** l'attesa duri meno di 10 minuti

**Eventi incompatibili = +**

Somma delle probabilità che avvengano i casi possibili (in cui è presente almeno una volta l'evento "a").

$$P_{tot} = 0,64 + 0,16 + 0,16 = \mathbf{0,96}.$$

**Nel gioco della roulette, come si sa, i numeri vanno da 0 a 36. Qual è la probabilità che il 17 esca due volte di fila:**

- A)  $1/(37 \times 37)$  
- B)  $1/(37 \times 36)$
- C)  $1/(36 \times 36)$
- D)  $1/37 + 1/37$
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

**La risposta D) sarebbe stata giusta se la domanda fosse stata:**

**“Qual è la probabilità che possa uscire (in una sola giocata) il 17 oppure il 18 ?”**

## Modifichiamo il quiz precedente:

Qual è la probabilità che alla roulette esca una prima volta il 17 ed una seconda un numero diverso dal 17 ?

- A)  $1/(37 \times 37)$
- B)  $1/(37 \times 36)$
- C)  $1/37 \times 36/37$  
- D)  $1/37 + 36/37$
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

Il ragionamento è simile al precedente (ovvero: devo fare il PRODOTTO di due probabilità) MA è diversa la seconda probabilità:

Come prima la probabilità di uscita del 17 la prima volta è di  $1/37$

Dopo che, la probabilità che la seconda volta NON esca il 17 vale:  
 $(37-1)/37 = 36/37$

**Alan lancia contemporaneamente due dadi non truccati con le facce numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi ?**

**A)  $1/2$**

**B)  $1/36$**

**C)  $1/3$**

**D)  $1/18$**

**E)  $1/6$**



I casi favorevoli sono:

(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

I casi possibili sono 6 (per il primo dado)  
per 6 (secondo dado).

Quindi...

Scegliendo a caso due allievi della classe prima, composta da 21 allievi, una volta su due gli studenti scelti portano gli occhiali. Qual è il numero di allievi della classe prima che portano gli occhiali?

- A) 15
- B) 11
- C) 12
- D) 9
- E) 17

In questo problema non si chiede di calcolare una probabilità, ma al contrario la si fornisce.

**L'idea di base è che l'equazione che servirà a trovare la soluzione proviene proprio dallo scrivere la formula che esprime tale probabilità, inserendo come incognita (x) il numero di allievi con gli occhiali:**

$$1) 21 = x + y$$

x = numero di allievi con gli occhiali  
y = numero di allievi senza occhiali

$$2) P(\text{occhiali n.1, occhiali n.2}) = P(\text{occhiali n.1}) \times P(\text{occhiali n.2})$$

$$P(\text{occhiali n.1}) = x / 21$$

$$P(\text{occhiali n.2}) = (x-1) / 20 \text{ !!!!!} \quad \text{NON: } (x-1) / 21; \text{ NON: } x / 20$$

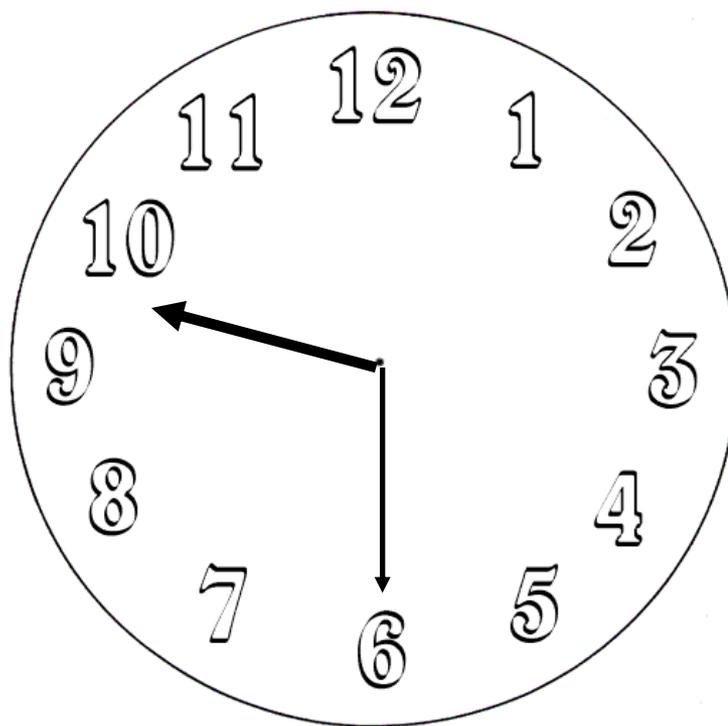
$$\text{quindi: } x/21 \cdot (x-1)/20 = 1/2$$

Scegliendo a caso due allievi della classe prima, composta da 21 allievi, una volta su due gli studenti scelti portano gli occhiali. Qual è il numero di allievi della classe prima che portano gli occhiali?

- A) 15 
- B) 11
- C) 12
- D) 9
- E) 17

10. Se le lancette di un orologio segnano le 21.30 di mercoledì, tra 53 ore e 45 minuti saranno:

- A) le 3.15 di sabato
- B) le 23.15 di giovedì
- C) le 2.15 di domenica
- D) le 3.15 di venerdì
- E) le 2.15 di sabato



# Aritmetica modulare

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

L'**aritmetica modulare** (a volte detta **aritmetica dell'orologio** poiché su tale principio si basa il calcolo delle ore a cicli di 12 o 24) rappresenta un importante ramo della **matematica**. Essa trova applicazioni nella **crittografia**, nella **teoria dei numeri** (in particolare nella ricerca dei **numeri primi**) ed è alla base di molte delle più comuni operazioni **aritmetiche** e **algebriche**.

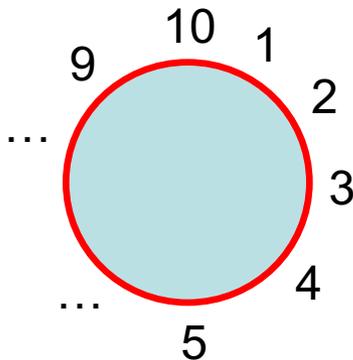
$$A = B \pmod{n}$$



$A - B$  è multiplo di  $n$

$A, B, n$ : interi  
 $n \neq 0$

**Esempio:**  $10 = 120 \pmod{10}$



**Quindi:** avevamo 53 ore e 45'.

$$53 = 5 \pmod{12}$$

→ Se invece di 53 ore ne passano 5, la posizione delle lancette NON cambia!

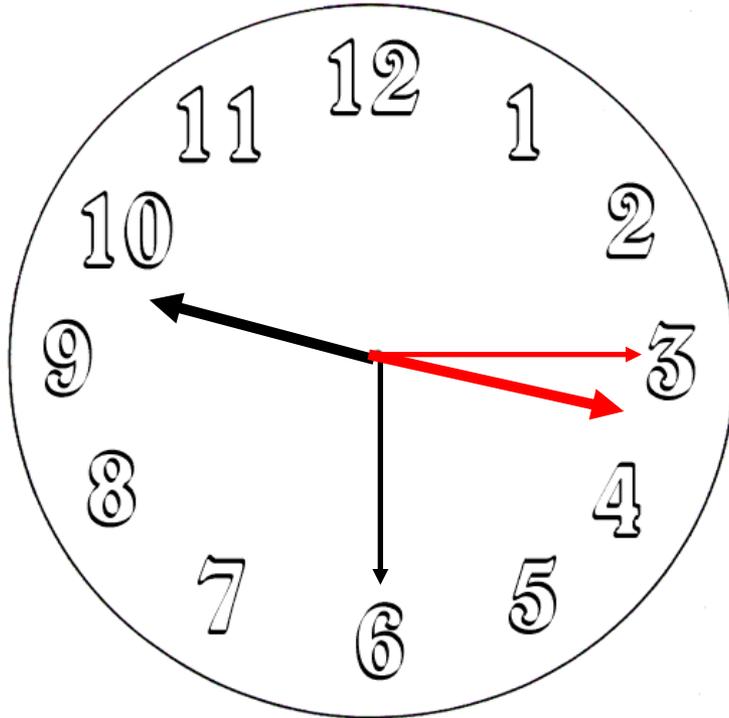
$$n = 4$$

**Ovvero: 4 volte 12 ore**  
**→ 2 giorni**

→ 53 ore e 45' = 5 ore e 45' (mod 12)

OK. Ma  $n$  quanto vale ?

le lancette di un orologio segnano le 21.30 di mercoledì,



**Quindi:**

53 ore e 45' sono «come se» fossero passate 5 ore e 45' ma siamo 2 giorni avanti

→ Sono le 21 e 30 di venerdì' + 5 ore e 45'

**→ Sono le 03 e 15 di sabato!**

10. Se le lancette di un orologio segnano le 21.30 di mercoledì, tra 53 ore e 45 minuti saranno:

- A) le 3.15 di sabato ←
- B) le 23.15 di giovedì
- C) le 2.15 di domenica
- D) le 3.15 di venerdì
- E) le 2.15 di sabato