

Facoltà di Medicina e Chirurgia
Università degli Studi di Firenze
Precorsi 2012

Problemi di Matematica

Giovanni Romano

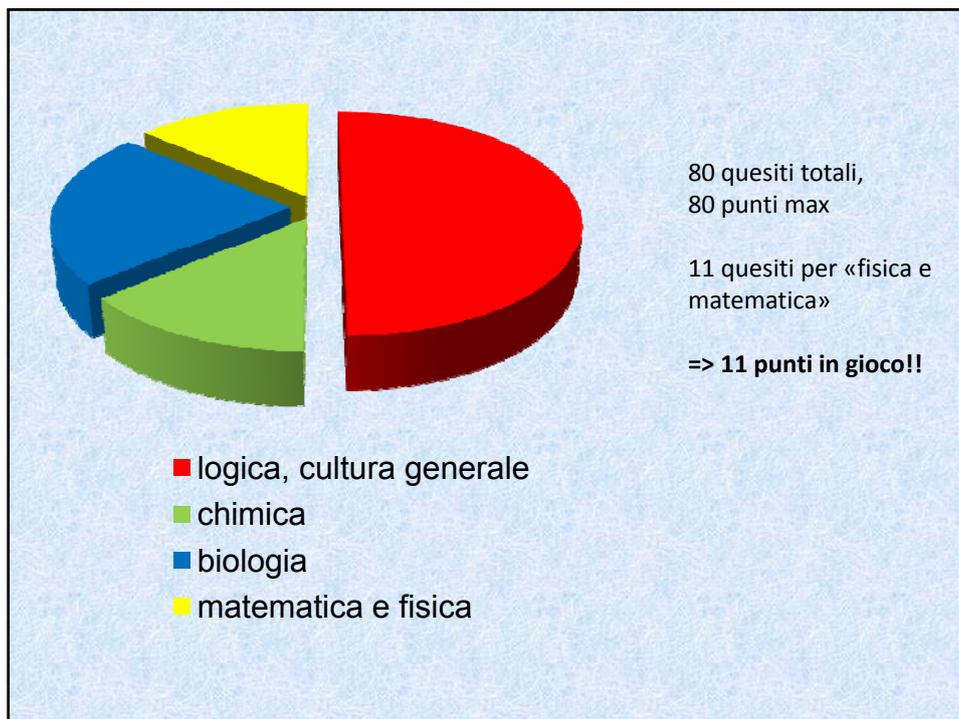
Sezione di Fisica Medica
Dipartimento di Fisiopatologia Clinica

Decreto Ministeriale 28 giugno 2012 n. 196

(...)

3) La prova di ammissione consiste nella soluzione di **ottanta quesiti** che presentano cinque opzioni di risposta, di cui il candidato ne deve individuare una soltanto, scartando le conclusioni errate, arbitrarie o meno probabili, su argomenti di: cultura generale e ragionamento logico; biologia; chimica; fisica e matematica. Sulla base dei programmi di cui all'allegato A, che costituisce parte integrante del presente decreto, vengono predisposti: quaranta (40) quesiti per l'argomento di cultura generale e ragionamento logico; diciotto (18) di biologia, undici (11) di chimica e **undici (11) di fisica e matematica**.

4) La prova di ammissione ha inizio alle ore 11.00 e per il suo svolgimento è assegnato un tempo di due ore.



argomenti

- Numeri, frazioni, operazioni fondamentali
- Potenze e logaritmi
- Equazioni e sistemi di equazioni
- Progressioni e successioni
- Geometria piana e solida
- Funzioni - Piano cartesiano
- Statistica - Probabilità

Le note teoriche, comprese le relative immagini, sono tratte da wikipedia (versione italiana) ove non altrimenti specificato. Un asterisco nel testo indica una domanda posta all'esame di ammissione 2011.

Numeri, frazioni, operazioni fondamentali

La metà di 10^6 è:

In matematica la potenza è un'operazione che associa ad una coppia di numeri a e n - detti rispettivamente base ed esponente - il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a :

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

In questo contesto a può essere un numero intero, razionale o reale mentre n è un numero intero positivo.

Le potenze scritte nella forma a^n si leggono come *elevato alla n* o più semplicemente *alla n* .

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

da cui ad esempio: $10^5 = 10^6 / 10^1 = 10^6 / 10$

La metà di 10^6 è:

a) 10^3

b) 56

c) $0,2 \cdot 10^6$

d) $5 \cdot 10^5$ 

e) $5 \cdot 10^6$

La somma di due numeri interi consecutivi è 169. La loro differenza in valore assoluto è:

- a) 2
- b) 12,5
- c) 1 
- d) >13
- e) 9

Interi **consecutivi**

La loro **differenza**

$$N + (N+1) = 169$$

$$N = (169 - 1) / 2 = 168 / 2 = 84$$

$$N+1 = 85$$

$$85 - 84 = 1$$

*Sia $a = 1001^2 - 999^2$. Determinare quale delle seguenti relazioni è verificata.

- A) $3000 < a < 5000$
- B) $a < 1000$
- C) $1000 < a < 3000$
- D) $5000 < a < 7000$
- E) $a > 7000$

Si può impostare il problema trovando direttamente il valore di a .

$$a = (1000 + 1)^2 - (1000 - 1)^2 = \cancel{1000^2} + 2000 + 1 - (\cancel{1000^2} - 2000 + 1)$$

Quindi $a = 4000$

Questo metodo è un po' lungo...

Meglio così:

$$a = 1001^2 - 999^2 \quad \text{quindi del tipo } a = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$\text{Perciò } a = 2000 \cdot 2 = 4000$$

***Sia $a = 1001^2 - 999^2$. Determinare quale delle seguenti relazioni è verificata.**

A) $3000 < a < 5000$ 

B) $a < 1000$

C) $1000 < a < 3000$

D) $5000 < a < 7000$

E) $a > 7000$

Un numero è divisibile per 4 quando:

In aritmetica, i criteri di divisibilità sono degli algoritmi che permettono di verificare la divisibilità di un numero per un fattore senza eseguire la divisione esplicita.

Consistono in una serie di operazioni sulle cifre che compongono il numero.

(...) vale la regola generale per cui un numero è divisibile per X se lo è contemporaneamente per tutti i fattori di X .

Così si può affermare ad esempio che un numero è divisibile per 6 se lo è sia per 2 che per 3.

Divisibilità per 4

Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono 00 oppure formano un numero multiplo di 4,

o equivalentemente: se le ultime due cifre sono tali che la sua penultima è dispari e l'ultima è 2 oppure 6, oppure la sua penultima cifra è pari e l'ultima è 0, 4, 8.

Un numero è divisibile per 4 quando:

A meno di non ricordarsi il criterio, si va per esclusione

- 1) La somma delle sue cifre è divisibile per 4 **(NO, es. 13)**
- 2) Il numero formato dalle sue due prime cifre è divisibile per 4 **(NO, es. 121)**
- 3) La sua ultima cifra è pari **(NO, es. 14)**
- 4) Il numero formato dalle sue due ultime cifre è divisibile per 4 
- 5) La sua ultima cifra è 4 oppure 8 **(NO, es. 14)**

***Una potenza perfetta è un numero intero che si può scrivere nella forma a^b , con a e b interi maggiori o uguali a 2. Determinare quale dei seguenti interi NON è una potenza perfetta.**

- A) 125
- B) 2500
- C) 216
- D) 500
- E) 1000

si potrebbe scomporre ogni numero in fattori primi
ad es.: $2500 = 2^2 \cdot 5^4$

però è un metodo troppo lungo...

ragionevolmente mi aspetto che i numeri da escludere siano dei quadrati o dei cubi...

$$125 = 5^3$$

$$2500 = 50^2$$

$$216 = 6^3$$

$$1000 = 10^3$$

oppure può saltare all'occhio che $500 = 5 \cdot 100$:
5 è numero primo e solo 100 è un quadrato perfetto...

***Una potenza perfetta è un numero intero che si può scrivere nella forma ab , con a e b interi maggiori o uguali a 2. Determinare quale dei seguenti interi NON è una potenza perfetta.**

- A) 125
- B) 2500
- C) 216
- D) 500 ←
- E) 1000

*In un contenitore ci sono 2 litri di liquido, di cui il 75% è vino ed il restante 25% è acqua.
Determinare quanti centimetri cubi di vino bisogna aggiungere per portare la percentuale di vino all'80%.

- A) 500
- B) 300
- C) 400
- D) 100
- E) 200

A prima vista parrebbe giusto risolverlo così':

75% di 2l = 1.5l di vino
25% di 2l = 0.5l di acqua

~~80% di 2l = 1.6l (di vino)~~

~~→ passo da 1.5l a 1.6l quindi la risposta è 0.1l di vino in più' ovvero 100cc~~

(...) Determinare quanti centimetri cubi di vino bisogna aggiungere per portare la percentuale di vino all'80%.



il volume totale aumenta, mentre nella risoluzione di prima era stato tenuto fisso a 2l !!!

se «x» è la quantità cercata:

$$1.5 + x = 80\% (2 + x)$$

$$x = 0.5 \text{ litri}$$

ALTERNATIVAMENTE: la quantità di acqua non varia e rimane 0.5 litri = 20% e non più' 25% → il vino è pari all' 80% (4 volte l'acqua) = $0.5 \cdot 4 = 2l$ mentre prima era 1.5l

→ devo aggiungere 0.5l ovvero 500cc

*In un contenitore ci sono 2 litri di liquido, di cui il 75% è vino ed il restante 25% è acqua.
 Determinare quanti centimetri cubi di vino bisogna aggiungere per portare la percentuale di vino all'80%.

- A) 500 ←
- B) 300
- C) 400
- D) 100
- E) 200

Ricorda!

un litro = 1000ml = 1 dm³ = 1000cm³ = 1000cc

1ml = 1cc

1l = 1000ml

1l = 1000cc

**Attenzione inoltre a non confondere fra loro
 1cc (1 centimetro cubo) con 1cl (1 centilitro)!!**

Un lavoratore riceve netti 1000 euro al mese; il datore di lavoro paga 1/3 del valore lordo in tasse. Qual è la spesa aggiuntiva sostenuta dal datore di lavoro, se lo stipendio netto passa da 1000 a 1500 euro al mese ?

$$\text{Netto} = 2/3 \text{ lordo} \rightarrow \text{lordo} = 3/2 \text{ netto} = 1.5 \text{ netto}$$

Il datore di lavoro spende il lordo

$$1000 \text{ netti} \rightarrow \text{datore spende } 1500$$

$$1500 \text{ netti} \rightarrow \text{datore spende } 2250$$

- 1) 250 euro
- 2) 750 euro ←
- 3) 500 euro
- 4) 2250 euro
- 5) Con i dati forniti non si puo' rispondere

Digitando l'importo, arrotondato all'euro, di uno degli assegni incassati in un certo giorno, un cassiere ha involontariamente invertito tra loro due cifre, causando a fine giornata una differenza positiva tra la somma di tutti i numeri digitati e la somma degli importi dei corrispondenti assegni arrotondati all'euro.

Tale differenza è sempre divisibile per:

- A) 10
- B) 4
- C) 5
- D) 2
- E) 9

Un generico numero intero con un qualsiasi numero di cifre (maggiore o uguale a due) è rappresentabile sempre come:

$N = M + 10d + u$ Dove "d" indica la cifra delle decine ed "u" quella delle unità

Esempio: $1256 = 1200 + 10 \cdot 5 + 6$ $N = 1256; M=1200; d=5; u=6$

Se inverte le ultime due cifre ottengo $M + 10u + d$

$C = \text{Valore corretto} = M + 10d + u$

$E - C > 0$

$E = \text{Valore errato} = M + 10u + d$

$E - C = 10u + d - (10d + u) = 10(u-d) - (u-d) = 9(u-d)$

Ho finito!!! (??!!)

Digitando l'importo, arrotondato all'euro, di uno degli assegni incassati in un certo giorno, un cassiere ha involontariamente invertito tra loro due cifre, causando a fine giornata una differenza positiva tra la somma di tutti i numeri digitati e la somma degli importi dei corrispondenti assegni arrotondati all'euro.

Tale differenza è sempre divisibile per:

A) 10

B) 4

C) 5

D) 2

E) 9



Non mi interessa sapere se la differenza a fine giornata sia positiva o meno

(al cassiere si'....)

Qual è il piu' grande fra i seguenti numeri:

2^{62} ; 232; $2^{(2^6)}$; $(2^2)^6$; 1024

1) 2^{62}

2) 232

3) $2^{(2^6)}$

4) $(2^2)^6$

5) 1024



Proprietà delle potenze
 $(X^a)^b = X^{ab}$

Confronterò quindi:

1) 62

2) escluso subito ($232 < 1024$)

3) $2^6 = 64$

4) $2 \cdot 6 = 12$

5) 10 ($1024 = 2^{10}$)

Se sul prezzo di un oggetto si pratica lo sconto del 30%, e quindi sul prezzo così ottenuto si applica un nuovo sconto del 20%, quanto vale in percentuale lo sconto (cioè la riduzione percentuale) totale sul prezzo iniziale:

Attenzione: il 20% è applicato sul valore già scontato del 30% !!!

Parto da 100 → 70 → 56, quindi in tutto l'ho scontato del....

A) quesito senza soluzione univoca e corretta

B) 44% 

C) 50%

D) 36%

E) 66%

$$\text{lo pago } X \cdot 70/100 \cdot 80/100 = 56/100 \cdot X$$

$$\Rightarrow \text{Sconto totale} = 44 / 100 \cdot X$$

Data l'equazione $5 \log x = \log 32$, posso affermare che x è uguale a:

Si dice *logaritmo* in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x (x viene chiamato *argomento* del logaritmo).

In altre parole, se $x = a^y$

segue che: $y = \log_a x$

(si legge: y è il logaritmo in base a di x).

Per esempio, $\log_3 81 = 4$ perché $3^4 = 81$. Vale in particolare la relazione:

$$\log_a (x^k) = k \log_a (x).$$

dove a , x e y sono numeri reali positivi, con a diverso da 1.

Data l'equazione $5 \log x = \log 32$, posso affermare che x è uguale a:

- 1) $\frac{1}{2}$
- 2) 2
- 3) 5 
- 4) $4/(2)^{-1/2}$
- 5) Nessuna delle altre quattro risposte

Proprietà dei logaritmi
 $k \log x = \log (x^k)$

$$\text{Log } x^5 = \log 32$$

$$x^5 = 32$$

Se x e y sono due numeri diversi da 0 (x positivo), quale delle seguenti affermazioni è vera:

- A) y^x è sempre maggiore di 0 (NO, es. $(-2)^3$)
- B) $\log (x \cdot y)$ è sempre maggiore di 0 (NO se $xy < 1$)
- C) $x \cdot y$ è sempre maggiore di 0 (NO se $y < 0$)
- D) x^y è sempre maggiore di 0 
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

Ricordarsi le proprietà dei logaritmi e delle potenze e poi andare per esclusione

Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,...

potrei pensare di essere di fronte ad una progressione aritmetica:

In matematica una **progressione aritmetica** è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante.

Tale costante viene detta *ragione* della progressione.

Per esempio, la successione 3, 5, 7, 9, 11, ... è una progressione aritmetica di ragione 2.

Completare la seguente successione 125, 64, 27, 8,...

a) 1 

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

$1 = 1$ al cubo

La successione proposta NON è né aritmetica né geometrica!

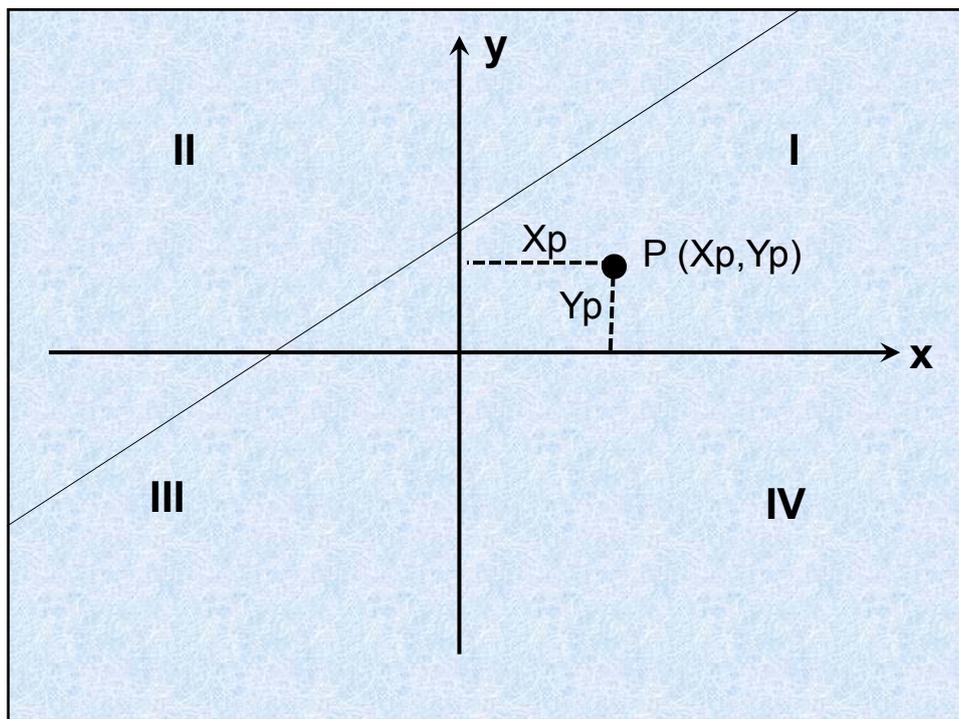
I valori della successione sono accomunati da una proprietà: sono tutti interi e NON sono dei quadrati perfetti, bensì'....

Con a e b diversi da 0, $(a+b) / (axb)$ è uguale a:

- A) $(1/a) \times (1/b)$
- B) $(1/a) + (1/b)$ 
- C) $(1/a)/(1/b)$
- D) $(a+b)/(a-b)$
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

Funzioni
Piano cartesiano
Geometria



Sia $f(x) = 5^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ è uguale a:

- A) 5^x
- B) $4 \cdot 5^x$ ←
- C) $5 \cdot 5^x$
- D) 5
- E) 1

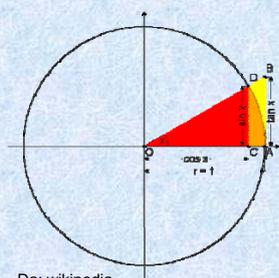
Proprietà delle potenze: $5^{(x+1)} = 5^x \cdot 5$

$$5^x \cdot 5 - 5^x = 5^x \cdot 4$$

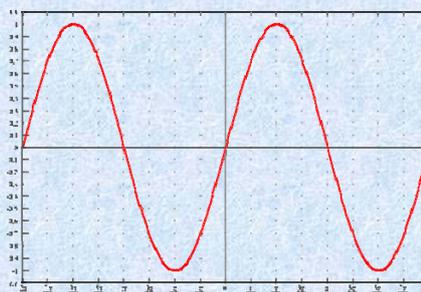
La funzione $\sin \alpha$:

- a) si misura in gradi centigradi
- b) si misura in radianti
- c) si misura in gradi sessagesimali
- d) si misura in centimetri o metri
- e) è un numero puro

Ricordarsi la definizione del seno di un angolo



Da: wikipedia



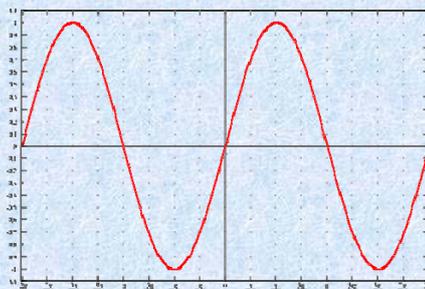
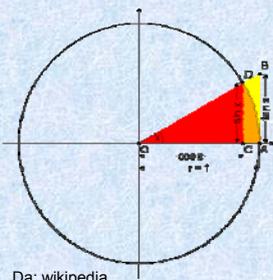
La funzione $\sin \alpha$:

- a) si misura in gradi centigradi
- b) si misura in radianti
- c) si misura in gradi sessagesimali
- d) si misura in centimetri o metri
- e) è un numero puro ←

L'espressione $2\sin(1)\cos(1)$:

- 1) vale 2
- 2) vale 0
- 3) vale $2\sqrt{2}$
- 4) è compresa fra 0 e 2 ←
- 5) è compresa fra -1 e 0

Ricordarsi le proprietà del seno e del coseno.



Quale delle seguenti funzioni è rappresentata da una retta in coordinate cartesiane:

a) $y = \log_{10} 10^{2x}$ ←

b) $y = (x-1)(x+1)$

c) $y = 1/(x+1)$

d) $y = x/(x-1)$

e) $y = (1-x^2)$

Escludere le funzioni NON lineari

...oppure ricordarsi che $\log_a a^x = x$

***Consideriamo la funzione $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$, definita per ogni x reale.**

Determinare quale delle seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x)$ è FALSA.

- A) Non assume valori maggiori di $\sqrt{5}$
- B) Non assume valori minori di -3
- C) Non si annulla mai
- D) E' periodica
- E) $f(\pi) = 1$

Attenzione alla domanda posta in negativo («...quale è FALSA»)

Seno e coseno hanno entrambe valori compresi fra -1 e $+1$ → ESCLUDO A) e B)

Seno e coseno sono entrambe periodiche → ESCLUDO D)

Restano la C) e la E). Ricordandosi che $\sin(\pi)=0$ e $\cos(2\pi)=1$...

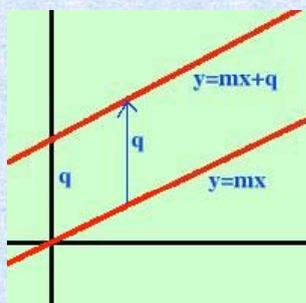
***Consideriamo la funzione $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$, definita per ogni x reale.
Determinare quale delle seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x)$ è FALSA.**

- A) Non assume valori maggiori di $\sqrt{5}$
- B) Non assume valori minori di -3
- C) Non si annulla mai 
- D) E' periodica
- E) $f(\pi) = 1$

Quale delle seguenti condizioni deve verificarsi affinché la retta di equazione $y = mx + n$ non passi per il quarto quadrante?

- 1) $m < 0, n > 0$
- 2) $m > 0, n < 0$
- 3) $m < 0, n < 0$
- 4) $m > 0, n = 0$
- 5) $m > 0, n > 0$

*Attenzione a ricordare qual è il IV quadrante.
Qual è il significato di m e di n ?*



<http://www.ripmat.it/>

Se $m > 0$ si hanno le rette in figura

Di sicuro, per NON passare dal 4 quadrante, deve essere q (ovvero: n) > 0

Quale delle seguenti condizioni deve verificarsi affinché la retta di equazione $y = mx + n$ non passi per il quarto quadrante?

1) $m < 0, n > 0$

2) $m > 0, n < 0$

3) $m < 0, n < 0$

4) $m > 0, n = 0$

5) $m > 0, n > 0$ ←

Due rette di equazioni $y = mx$ e $y = nx$ sono tra loro sempre perpendicolari se:

- 1[^]) $mn = 1$
- 2[^]) $mn = -1$ ←
- 3[^]) $m = n$
- 4[^]) $mn = 0,5$
- 5[^]) $m/n = 0,5$

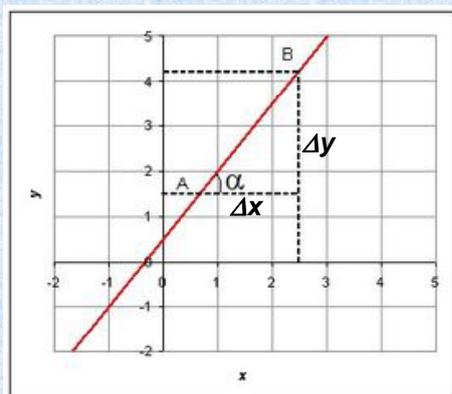
In generale l'angolo γ tra 2 rette è determinato da $\text{tg } \gamma = (m-n)/(1+mn)$ che non è facile da ricordare. Oppure potete provare con la trigonometria perché se $m = \text{tg } \alpha$ avremo che $n = \text{tg}(\alpha + \pi/2)$.

...oppure ragionare trovando che il prodotto mn deve essere negativo....

Il coefficiente angolare di una retta e':

- 1[^]) l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse espresso in radianti
- 2[^]) l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ordinate espresso in radianti
- 3[^]) il seno dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse
- 4[^]) la tangente dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse
- 5[^]) il coseno dell'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse

coefficiente angolare di una retta: $m = \Delta y / \Delta x$



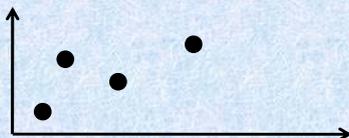
Quali dei seguenti punti sono fra loro allineati ?
A(0,0); B(1,2); C(7,5); D(3,6)

- 1) A, B, C
- 2) B, C, D
- 3) solo A e B
- 4) A, B, D ←
- 5) A, C, D

Ricordare la definizione di coefficiente angolare di una retta.

“Allineati” si riferisce almeno a 3 punti: 2 punti sono sempre allineati.

Coeff. angolare = $\Delta y / \Delta x$. Lo si calcoli con due punti “facili” dei 4 forniti...

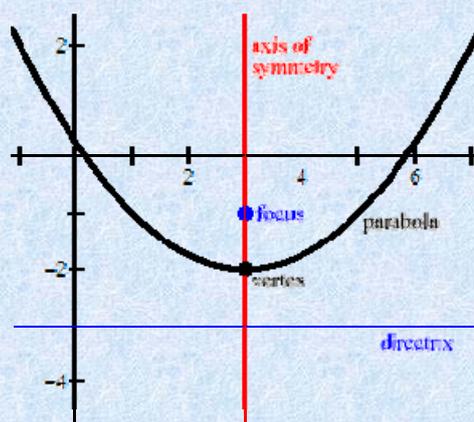


La parabola di equazione $y = -3x^2 + 3^{1/2}$:

- A) Non interseca l'asse delle ascisse
- B) Ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse
- C) Ha il vertice nel punto $(3^{1/2}, 0)$
- D) Ha il fuoco nel punto $(0, 3^{1/2})$
- E) Ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate

Conoscere le parabole. Provare prima la A) e la B): ci si potrebbe evitare di calcolare la posizione del fuoco o del vertice...

Ricordarsi che $3^{1/2}$ =radice di tre



<http://www.mathwords.com>

Vertice $(-b / 2 a, - \Delta / 4 a)$; $\Delta = b^2 - 4ac$

La parabola di equazione $y = -3x^2 + 3^{1/2}$:

- A) Non interseca l'asse delle ascisse **NO, l'equazione $y=0$ ha soluzioni !**
- B) Ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse **NO, è del tipo $y=...$**
- C) Ha il vertice nel punto $(3^{1/2}, 0)$ **NO**
- D) Ha il fuoco nel punto $(0, 3^{1/2})$ **NO**
- E) Ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate **←**

Due rette che non si incontrano:

- 1) possono essere parallele **←**
- 2) giacciono sicuramente in due piani diversi
- 3) giacciono sicuramente nello stesso piano
- 4) sono sicuramente parallele
- 5) non sono sicuramente parallele

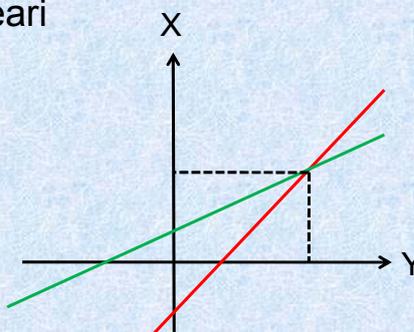
E' piu' un esercizio di logica che di geometria...

Ricordarsi che le rette "vivono" nello spazio tridimensionale, in generale...

ricordarsi del caso di due rette «sghembe» !!

Sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ a'X + b'Y + c' = 0 \end{cases}$$



Se $a/a' = b/b'$ le due rette sono parallele \rightarrow nessuna soluzione

Se in piu' anche $c/c' = a/a' = b/b'$
allora le rette sono coincidenti \rightarrow infinite soluzioni

Un sistema è determinato se ha una ed una sola soluzione (x^*, y^*) .

Dei seguenti sistemi lineari uno solo è determinato (ha una ed una sola soluzione). Quale di essi?

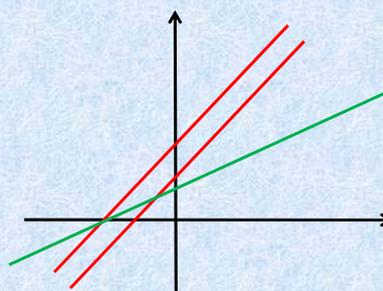
A) $\begin{cases} 2x - y - 9 = 0 \\ -x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ 

B) $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{2}x = 2 - \frac{1}{2}y \end{cases}$

C) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

D) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

E) $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$



I casi B e C sono rette parallele
I casi D ed E sono rette coincidenti

Gli angoli di un triangolo sono in progressione aritmetica, e il maggiore è il doppio del minore; I valori in gradi sono:

1) 20, 30, 40

2) 40, 50, 80

3) 60, 90, 120

4) 40, 60, 80 ←

5) 45, 70, 95

Ricordarsi cosa vuol dire "progressione aritmetica".

Ricordarsi che è un triangolo: la somma dei 3 angoli "fa sempre 180 gradi"

***Un cane è legato, mediante una catena lunga 13 m, a un palo che dista 5 m da un sentiero rettilineo. Determinare la lunghezza del tratto di sentiero accessibile al cane.**

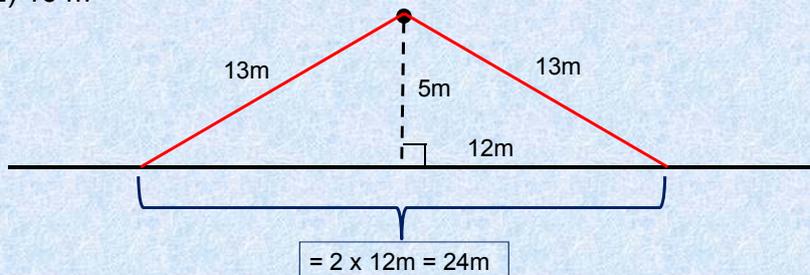
A) 18 m

B) 20 m

C) 24 m ←

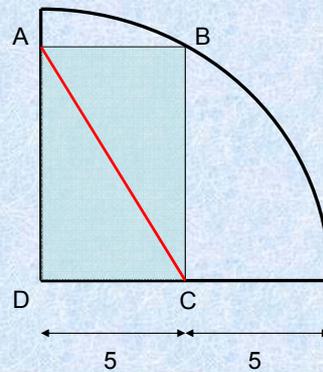
D) 26 m

E) 16 m



Il rettangolo ABCD è inscritto in un quarto circonferenza. Quanto vale il segmento AC ?

- 1^) 5
- 2^) 5 moltiplicato radice di due
- 3^) 5 diviso radice di 2
- 4^) 10 ←
- 5^) 7.5



Ricordarsi che ogni rettangolo ha 2 diagonali, e che esse sono uguali...

Il rapporto tra i volumi di due cubi è 4. Qual è il rapporto tra le loro superfici?

- A) $2^{3/2}$
- B) 4
- C) 2
- D) $4^{1/3}$
- E) $4^{2/3}$ ←

È in realtà un esercizio sulle potenze.

$$V = L^3$$

$$V_1 / V_2 = L_1^3 / L_2^3$$

$$S_1 / S_2 = L_1^2 / L_2^2$$

$$S_1/S_2 = (L_1/L_2)^2$$

$$V_1/V_2 = (L_1/L_2)^3$$



$$S_1/S_2 = (V_1/V_2)^{2/3}$$

Probabilità

Definizione classica di Probabilità

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un **evento** è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili. (...)

Indicando con Ω l'insieme di casi possibili e con $|\Omega|=n$ la sua cardinalità, con A un evento e con n_A il numero dei casi favorevoli ad A (ad esempio, nel lancio di un dado $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$, $A =$ "numero pari", $n_A = 3$), la probabilità di A , indicata con $P(A)$, è pari a:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dalla definizione segue che:

- la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso tra 0 e 1
- la probabilità dell'evento certo è pari a 1; se $A = \text{"numero compreso tra 1 e 6"}$, $n_A = 6$ e $n_A/n = 1$
- la probabilità del verificarsi di uno di due **eventi incompatibili**, ovvero di due eventi che non possono verificarsi simultaneamente, è pari alla somma delle probabilità dei due eventi; se $A = \text{"numero pari"}$, con $P(A) = 1/2$, e $B = \text{"esce il 3"}$, con $P(B) = 1/6$, la probabilità che tirando un dado si ottenga un numero pari oppure un 3 è:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Nel gioco dei dadi, lanciando contemporaneamente due dadi, qual è la probabilità che si abbiano due facce con somma 7 ?

1) 1/3

2) 1/7

3) 1/6 

4) 2/7

5) 5/36

Quanti sono gli eventi favorevoli e quanti gli eventi possibili ?

Nel gioco della roulette, come si sa, i numeri vanno da 0 a 36. Qual è la probabilità che il 17 esca due volte di fila:

- A) $1/(37 \times 37)$ 
- B) $1/(37 \times 36)$
- C) $1/(36 \times 36)$
- D) $1/37 + 1/37$
- E) quesito senza soluzione univoca e corretta

La risposta D) sarebbe stata giusta se la domanda fosse stata:

“Qual è la probabilità che possa uscire (in una sola giocata) il 17 oppure il 18 ?”

Qual è la probabilità che un numero a due cifre abbia per somma delle cifre il valore 12 ?

- 1) $7/99$
- 2) $2/90$
- 3) $2/10$
- 4) $7/90$ 
- 5) $12/100$

Quanti sono gli eventi favorevoli e quanti gli eventi possibili ?

I numeri a due cifre vanno da 10 a 99 quindi sono 90

Casi favorevoli: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93

Una coppia vuole avere due figli dello stesso sesso: quanti figli deve avere per essere sicura che almeno due siano dello stesso sesso ?

- 1) 2
- 2) 3 
- 3) 4
- 4) Non si puo' stabilire
- 5) Piu' di 4

Se il primo figlio sarà maschio, il secondo potrebbe essere femmina, ma il terzo...
Analogo ragionamento se si suppone che il primo sia femmina...

La probabilità che lanciando simultaneamente due dadi si ottengono due numeri la cui somma vale 11 è, rispetto alla probabilità che si ottengano due numeri la cui somma vale 10:

- 1) non paragonabile, perché si tratta di eventi diversi
- 2) minore 
- 3) maggiore
- 4) uguale
- 5) circa doppia

Nei due casi, il numero di eventi possibili è lo stesso, quindi la domanda equivale a chiedere:

Quante sono le possibilità (casi favorevoli) di fare 11 ? E di fare 10 ?

***Determinare quante sono le parole di 7 lettere** (anche senza senso) **che si possono scrivere utilizzando solo le 4 lettere A, C, G, T** (si intende che non bisogna necessariamente utilizzare tutte le 4 lettere, per cui per esempio anche la parola AGGTATA va bene).

- A) $7 \cdot 4$
- B) $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) / (4 \cdot 3 \cdot 2)$
- C) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$
- D) 7^4
- E) 4^7

(_ , _ , _ , _ , _ , _ , _)

4 possibilità per
la prima lettera

...per ciascuna
delle quali ho 4
possibilità per la
seconda lettera

... e così' via per le altre

In tutto ho quindi $4 \times 4 \times \dots \times 4 = 4^7$ parole

***Determinare quante sono le parole di 7 lettere** (anche senza senso) **che si possono scrivere utilizzando solo le 4 lettere A, C, G, T** (si intende che non bisogna necessariamente utilizzare tutte le 4 lettere, per cui per esempio anche la parola AGGTATA va bene).

A) $7 \cdot 4$

B) $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) / (4 \cdot 3 \cdot 2)$

C) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

D) 7^4

E) 4^7 

Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?

A) $15/64$

B) $1/64$

C) $15/16$

D) $1/16$

E) $5/32$

Numero di casi possibili: 2 casi per lancio di moneta = 64 casi totali = 2^6

Numero di casi favorevoli = numero di modi diversi in cui posso ottenere le 4 teste in 6 lanci

Esempi di casi favorevoli: TTTTcc, TTTcTc, TTTccT, ...

Il numero di casi favorevoli coincide con "numero di modi diversi con cui ottenere 2 croci in 6 lanci di moneta"

Conto questi casi: se al primo lancio ho croce, la seconda croce puo' capitare in uno dei 5 lanci successivi: 5 casi

Se invece ho la prima croce al primo lancio, la seconda puo' capitare in uno dei 4 lanci seguenti: altri 4 casi; e cosi' via

In totale ho: $5+4+3+2+1 = 15$ casi favorevoli

Combinazioni

Nel [calcolo combinatorio](#), se n e k sono due [interi](#) positivi, si definisce **combinazione** di n elementi presi k alla volta (oppure di n elementi di classe k) ogni sottoinsieme di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti. Se si impone la condizione che una combinazione non puo' avere un elemento ripetuto si parla di combinazioni semplici, (...) con $k \leq n$.

(...) i sottoinsiemi si considerano indipendenti dall'ordine degli elementi. Ad esempio, se siamo in presenza dell'insieme $\{p, q, r, s, t\}$ e prendiamo in esame le combinazioni di classe 3, non fa alcuna differenza considerare i gruppi prs , psr , rps , spr , rsp ed srp in quanto essi sono formati dagli stessi elementi, mentre prs ed srq sono considerate due combinazioni distinte in quanto differiscono in alcuni degli elementi.

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?

- A) $15/64$
- B) $1/64$
- C) $15/16$
- D) $1/16$
- E) $5/32$